

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ТЕПЛОФИЗИКИ ИМ С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
(ИТ СО РАН)

На правах рукописи

Бобров Максим Сергеевич

Развитие термогравитационной конвекции в горизонтальном слое газа при наличии  
линейно-протяженной температурной неоднородности на подстилающей  
поверхности

1.1.9 Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук

Хребтов Михаил Юрьевич

Новосибирск 2025

## Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Обзор литературы.....	11
1.1. Изучение взаимодействия вертикального и горизонтального тепловых потоков в термогравитационной конвекции .....	11
1.2. Численное моделирование как инструмент изучения конвективных течений .....	17
1.2.1 DNS моделирование .....	17
1.2.2. LES моделирование .....	18
1.2.3. RANS моделирование.....	19
1.3. Выводы.....	21
Глава 2. Исследование влияния линейно-симметричной поверхностной температурной неоднородности на конвекцию Рэлея – Бенара.....	22
2.1 Детали расчетов .....	23
2.1.1. Детали расчетов при различных значениях вязкости среды .....	24
2.1.2. Детали расчетов при различных значениях горизонтального градиента температуры на стенках .....	26
2.2. Результаты трехмерных расчетов при различных значениях вязкости среды.....	28
2.2.1. Обработка результатов методом SPOD .....	35
2.2.2. Асимптотическая оценка периода колебаний.....	37
2.3. Результаты двумерных расчетов.....	40
2.4. Результаты трехмерных расчетов при различных значениях горизонтального градиента температуры на стенках.....	42
2.5. Выводы.....	53
Глава 3. RANS-расчеты конвективных течений.....	55
3.1. Разработка RANS модели для моделирования динамики пограничного слоя с неоднородной конвекцией.....	56
3.1.1. Классическая $k - \varepsilon$ модель турбулентности.....	58
3.1.2. Модификация $k - \varepsilon$ модели с учетом локального числа Ричардсона .....	59
3.1.3. Модификация $k - \varepsilon$ модели с ограничением на длину смешения.....	61
3.2. Детали расчетов .....	62
3.2.1. Описание модели в одноячеечной постановке. ....	62
3.2.2. Описание модели в одномерной постановке. ....	67
3.3. Пристенные функции.....	68
3.4. Начальные и граничные условия и детали расчета.....	69
3.5. Верификация модели. Эксперимент GABLS. Одноячеечная модель. ....	70
3.6. Верификация модели. Эксперимент GABLS. Одномерная модель. ....	71

3.6.1. Зависимость решения от пространственного разрешения сетки. ....	71
3.6.2. Ночные условия .....	72
3.6.3. Утренний переход к условиям дневной неустойчивости .....	74
3.6.4. Вечерний переход к условиям ночной устойчивости .....	75
3.7. Исследование влияния поверхностной линейно-симметричной температурной неоднородности на динамику конвективного пограничного слоя.....	75
3.7.1. Детали расчетов .....	76
3.7.2. Сравнение динамики конвективных течений над неоднородно нагретой поверхностью при наличии запирающей инверсии и при фиксированной температуре на верхней границе... 77	
3.7.3. Исследование динамики конвективных течений над неоднородно нагретой поверхностью при изменении вертикального размера области .....	82
3.8. Сравнение результатов DNS и RANS исследований динамики конвективных течений .....	88
3.9. Выводы.....	89
Глава 4. Исследование совместного влияния поверхностного температурного градиента и поверхностного сдвига на структуру АПС.....	90
4.1. Описание используемой модели и особенностей расчетного кода.....	91
4.2. Моделирование профиля скорости реки.....	93
4.3. Моделирование воздействия течения реки в устойчивой стратификации.....	95
4.4. Моделирование случаев с течением реки и без него с учетом свободной конвекции .....	97
4.5. Моделирование влияния изгиба формы реки на течение в воздухе .....	104
4.6. Выводы.....	113
Заключение .....	115
Список условных обозначений.....	117
Публикации по теме диссертации.....	120
Список литературы .....	121

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Тепловая (термогравитационная) конвекция является одной из наиболее распространенных причин движения в жидкостях или газах. Тепловая конвекция представляет собой процесс переноса тепла и массы, при котором движение вещества возникает за счёт силы плавучести и разницы плотностей, обусловленной локальными изменениями температуры. Тепловая конвекция играет ключевую роль как в множестве природных ситуаций (атмосферное и океаническое движение, мантийная конвекция), так и в различных технологических системах (системы пассивного отопления и вентиляции, системы охлаждения в энергетике, охлаждение электронной аппаратуры), обеспечивая эффективное распределение тепла без внешнего механического воздействия. В связи с высокой распространенностью и высоким прикладным значением, конвекция активно изучается на протяжении многих десятилетий.

Одним из наиболее простых и хорошо изученных примеров тепловой конвекции является конвекция Рэлея – Бенара, которая представляет собой течение, которое образуется в вязкой среде при нагреве снизу и охлаждении сверху при наличии сил плавучести. В классической конвекции Рэлея – Бенара распределение температуры на стенках предполагается однородным, однако в ряде реальных примеров, таких как атмосферная конвекция, морская конвекция под плавучими льдами, а также мантийная конвекция, охватывающая континентальную и океаническую литосферу, присутствует неоднородное распределение температуры на границах. Кроме того, во многих прикладных задачах основную роль играют локализованные источники тепла.

В таких системах помимо вертикального градиента температуры, характерного для классической конвекции Рэлея – Бенара, присутствует и горизонтальный градиент, что существенно меняет структуру течения. Горизонтальный градиент температуры приводит к неоднородному распределению плотности жидкости в горизонтальном направлении, что создает градиент давления, который заставляет жидкость или газ двигаться в горизонтальном направлении. Таким образом, присутствие градиента температуры, при наличии силы плавучести, приводит к формированию тепловых и массовых потоков в жидкости, стремящихся уменьшить данный градиент.

Одновременное присутствие вертикального и горизонтального температурных градиентов приводит к формированию сложных течений, характер которых будет определяться свойствами среды, геометрией системы, формой неоднородностей, соотношением между вертикальной и горизонтальной составляющими температурного градиента и другими факторами. Несмотря на глубокую проработанность и широту охвата исследований по данной тематике, до сих пор

существует ряд задач, получивших недостаточное освещение в специализированной литературе. В частности, в достаточной мере не исследован эффект взаимодействия вертикального и горизонтального тепловых потоков, образующихся под воздействием линейно-симметричной поверхностной температурной неоднородности. Ярким примером такого взаимодействия является конвекция в атмосферном пограничном слое в окрестности незамерзающих рек в зимнее время года. В RANS исследовании динамики атмосферного пограничного слоя (АПС) для г. Красноярска [32] в зимний период был отмечен эффект осцилляций положения восходящего потока над незамерзающей рекой. Данные осцилляции сопровождались переходами больших объемов воздуха и переносимой им примеси с одного берега реки на другой и обратно. Распределение примесей из-за этого становилось неоднородным, возникали локальные пятна повышенной и пониженной концентрации вблизи поверхности. Природа данных осцилляций не была исследована ранее, что делает актуальным задачу по изучению динамики, структуры и механизмов формирования данного процесса.

Дополнительный интерес представляет исследование взаимодействия вертикального и горизонтального градиентов температуры с поверхностным сдвигом (вызываемым течением реки) с целью обнаружения эффектов интенсификации конвективных течений в атмосферном пограничном слое и исследования формирующихся в таком течении крупномасштабных вихревых структур.

**Целью диссертационной работы** является численное исследование взаимодействия вертикального и горизонтального потоков тепла и импульса в термогравитационных конвективных течениях при наличии линейно-протяженной температурной неоднородности на подстилающей поверхности.

**Задачи**, поставленные в соответствии с целью работы:

1. Прямое численное моделирование течения, образующегося под воздействием линейно-симметричной поверхностной тепловой неоднородности в ограниченной по вертикали области, при умеренных числах Рэлея ( $10^5$ – $10^8$ ), для различных значений кинематической вязкости и температуропроводности, а также интенсивности поверхностной тепловой неоднородности.
2. Исследование эффектов интенсификации и ослабления циркуляционных течений в зависимости от интенсивности линейно-симметричной поверхностной температурной неоднородности.
3. Анализ механизма формирования когерентных вихревых структур и колебательных процессов, образующихся под воздействием линейно-симметричной поверхностной тепловой неоднородности.

4. Исследование изменения параметров течения и осцилляций положения восходящего потока над линейно-симметричной поверхностной температурной неоднородностью, в зависимости от числа Рэлея.
5. Разработка и верификация уточненной RANS-модели для расчетов течений со смешанной конвекцией при высоких числах Рэлея.
6. RANS-моделирование течений, образующихся под воздействием линейно-симметричной поверхностной тепловой неоднородности, при высоких числах Рэлея ( $10^{13} - 10^{15}$ ), путем изменения вертикального размера расчетной области.
7. Расчет методом крупных вихрей совместного влияния поверхностной температурной неоднородности и поверхностного сдвига на структуру АПС в условиях устойчивой стратификации. Исследование влияния сдвига на формирующиеся приповерхностные циркуляционные течения.
8. Исследование влияния геометрической формы поверхностной температурной неоднородности и поверхностного сдвига на формирование крупномасштабных вихревых структур.

#### **Научная новизна.**

1. Впервые детально численно исследованы низкочастотные колебания потока, возникающие в течении Рэлея – Бенара при внесении на горизонтальные поверхности линейно-симметричной температурной неоднородности. Исследовано влияние тепловой неоднородности на средние характеристики течения и образующиеся в нем циркуляции. Найден диапазон соотношений между горизонтальным и вертикальным перепадами температур, при которых наблюдается эффект низкочастотных колебаний. Предложен механизм, объясняющий появление колебаний в потоке при данных условиях. Предложена асимптотическая оценка периода колебаний с ростом числа Рэлея.
2. Впервые численно исследована зависимость характеристик низкочастотных колебаний положения восходящего потока, образующихся под воздействием линейно-симметричной поверхностной тепловой неоднородности, при изменении расстояний между горизонтальными стенками в большом диапазоне чисел Рэлея ( $10^5 - 10^{15}$ ). Проведено сравнение колебаний, возникающих при наличии верхней стенки, с колебаниями, когда роль вертикального ограничения потока выполняет слой приподнятой инверсии.
3. Предложена и протестирована модификация классической  $k-\varepsilon$  модели турбулентности, улучшающая точность восстановления теплового потока на стенке за счет учета эффектов плотностной стратификации в потоке, выраженных через локальное число Ричардсона. Модель протестирована на данных атмосферных наблюдений и показала улучшение восстановления потоков тепла и импульса на стенке по сравнению со стандартной  $k-\varepsilon$  моделью.

4. Численно исследован эффект от течения реки на конвекцию в ночном пограничном слое при условии положительной разницы температур между поверхностью реки и окружающей почвой. Было обнаружено значительное ускорение прорастания слоя инверсии над рекой при учете ее течения, а также образование при этом крупномасштабных вихревых структур, концентрирующих в себе как вертикальную компоненту завихренности, так и повышенную температуру. Предложен механизм формирования таких структур за счет подъема завихренности с поверхности восходящим потоком от нагретой реки.

5. Исследовано формирование устойчивого течения воздуха через реку при наличии на реке изгиба. Возникновение такого струеобразного течения приводит к интенсификации переноса тепла, влаги и примеси с одного берега на другой. При наличии нескольких последовательных изгибов реки между ними возникают устойчивые вертикальные вихри, влияющие на циркуляционные течения.

**Научная и практическая значимость работы.** Результаты, изложенные в диссертации, способствуют более глубокому пониманию механизмов нелинейного взаимодействия вертикального и горизонтального тепловых потоков в термогравитационной конвекции. Обнаруженные низкочастотные колебательные процессы, возникающие при определенных соотношениях между горизонтальным и вертикальным температурными градиентами, ранее подробно не исследовались. Данные колебания возникают за счет сил плавучести, но их частоты на порядок меньше частот внутренних волн, образующихся за счет присутствующей плотностной стратификации потока. Обнаруженные эффекты интенсификации циркуляционных течений и формирования когерентных вихревых структур над неравномерно нагретой поверхностью могут быть использованы для решения задач контроля и управления конвективными потоками в различных технологических установках. Полученные результаты исследований интенсификации циркуляционных течений над линеаризованным участком реки, влияния эффекта от течения реки на ночной пограничный слой и влияния изгибов реки на конвективные потоки над ней могут быть использованы при создании моделей микроклимата отдельных регионов. Разработанная модификация  $k-\varepsilon$  модели с измененной параметризацией компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного теплового потока улучшает восстановление теплового потока от стенки по известному распределению температуры на ней за счет учета влияния плотностной стратификации потока. Данная модификация может быть использована для восстановления поверхностного потока тепла по данным распределения температуры на подстилающей поверхности, полученным с помощью спутникового мониторинга.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Результаты численного исследования структуры низкочастотных колебаний положения восходящего потока, возникающих в течении Рэлея – Бенара при внесении на горизонтальные поверхности линейно-симметричной температурной неоднородности при низких числах Рэлея ( $\sim 4 \cdot 10^5$ ). Найденная оценка диапазона соотношений между горизонтальным перепадом температур на стенке и вертикальным перепадом температур между стенками, при которых наблюдается эффект низкочастотных колебаний. Вычисленная зависимость средних характеристик течения (средних скоростей, распределений силы плавучести, масштабов зон рециркуляции) от соотношения между горизонтальным и вертикальным градиентами температур на границах.
2. Асимптотическая оценка зависимости пространственного и временного периодов низкочастотных колебаний восходящего потока над линейно-симметричной температурной неоднородностью на подстилающей поверхности от числа Рэлея. Проверка на данных прямого численного моделирования в диапазоне  $Ra = 3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^7$ . Исследование пространственной и спектральной структуры основных энергонесущих мод потока в зависимости от числа Рэлея.
3. Модификация  $k-\varepsilon$  модели с измененной параметризацией компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного теплового потока с использованием локального числа Ричардсона в качестве параметра усиления/ослабления вертикальных потоков импульса и тепла.
4. Оценка влияния вертикального масштаба течения на частоту, амплитуду и пространственный период колебаний положения восходящего потока над линейно-симметричной температурной неоднородностью при высоких числах Рэлея на основе RANS-моделирования.
5. Результаты численного LES-исследования взаимодействия сил плавучести с поверхностным сдвигом на примере эволюции атмосферного пограничного слоя вблизи линейризованной реки в ночных условиях при наличии положительной разности температур между рекой и окружающей почвой. Найденный эффект интенсификации приповерхностных циркуляций при включении течения реки в расчет. Найденные эффекты образования струйных течений над рекой, перпендикулярно направлению течения реки, при наличии изгибов реки.

**Степень достоверности** результатов исследования обеспечивается тщательной отработкой методик проведения численного моделирования. Достоверность результатов прямого численного моделирования и моделирования методом крупных вихрей подтверждается сравнением полученных полей средних характеристик базового течения Рэлея – Бенара с литературными данными, а также использованием ранее хорошо протестированного (как в расчетах на различных канонических конфигурациях, так и на результатах классических атмосферных экспериментов) открытого

программного кода MicroHH 1.0 ([www.microhh.org](http://www.microhh.org)), созданного для расчетов атмосферных и идеализированных течений методами DNS и LES. Представленная модификация  $k-\varepsilon$  модели с измененной параметризацией компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного теплового потока и соответствующим набором пристеночных функций была протестирована на данных экспериментальных наблюдений GABLS2 [81] для сухого атмосферного пограничного слоя. Для каждой рассматриваемой задачи проводилось исследование зависимости решения от пространственного разрешения расчетной сетки.

**Апробация результатов исследования.** Материалы диссертации были представлены на следующих международных и всероссийских конференциях:

4-th International Conference on Multi-scale Computational Methods for Solids and Fluids ECCOMAS MSF, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, 2019; XX Международная конференции по методам аэрофизических исследований, г. Новосибирск, 2020; XXXIV Сибирский теплофизический семинар, г. Новосибирск, Россия, 2018; XXXVI Сибирский теплофизический семинар, г. Новосибирск, Россия, 2020; XXXVIII Сибирский теплофизический семинар, г. Новосибирск, Россия, 2022; XXV Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям», г. Санкт-Петербург, 2018г.

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 9 работ, включая 7 статей в печатных изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК.

### **Личный вклад автора.**

Соискателем было проведено численное моделирование конвективных течений, образующихся под воздействием линейно-симметричной поверхностной тепловой неоднородности, при изменении физических параметров среды, интенсивности поверхностной тепловой неоднородности и вертикального размера расчетной области. Соискатель принимал участие в обработке результатов моделирования, построении спектральных характеристик и разработке асимптотической оценки периода низкочастотных колебаний конвективных ячеек с ростом числа Рэлея. Также соискатель принимал участие в разработке, реализации и тестировании модификации  $k-\varepsilon$  модели с измененной параметризацией компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного теплового потока в одноячеечной и одномерной постановке на основе собственного программного кода. Соискателем была проведена модификация расчетного модуля OpenFOAM для реализации предложенной модели турбулентности в трехмерной постановке; были проведены расчеты, обработка и анализ результатов в задаче по исследованию течений с неоднородной конвекцией при высоких числах Рэлея.

Соискатель проводил LES моделирование эволюции атмосферного пограничного слоя вблизи линейризованной реки в ночных условиях и над участком реки Енисей вблизи города Красноярска. Также соискатель принимал участие в статистической обработке и анализе всех полученных результатов, а также в представлении научных докладов и написании публикаций.

#### **Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и списка литературы. Работа изложена на 129 листах машинописного текста, включая 63 рисунка, библиографического списка из 113 наименований работ.

## Глава 1. Обзор литературы

### 1.1. Изучение взаимодействия вертикального и горизонтального тепловых потоков в термогравитационной конвекции

Нелинейное взаимодействие вертикального и горизонтального тепловых потоков в термогравитационной конвекции — важная проблема современной теплофизики, гидродинамики и различных инженерных приложений. Исследования по ней охватывают широкий спектр задач: от фундаментальных течений Рэлея – Бенара [2, 15] и вертикальной конвекции [104, 110] до сложных систем с локализованными источниками тепла [44, 42, 53, 99, 11], со сложной геометрией [26, 54, 101], анизотропией [11, 53, 99], магнитными [20] и капиллярными эффектами [43]. Работы демонстрируют, что при одновременном действии вертикального и горизонтального градиентов температуры возникают сложные режимы течения, включая конкуренцию между различными модами конвекции, формирование слоистых структур, изменение эффективности переноса тепла, появление новых типов неустойчивостей и возникновение различного рода осцилляций потока. Экспериментальные [97], численные [21] и аналитические [105] исследования показывают, что нелинейная связь между потоками может как усиливать [107], так и подавлять [3] теплоперенос, а также радикально менять структуру течения [79]. Особое внимание уделяется переходным режимам [99] и изучению сложных крупномасштабных процессов, таких как кластеризация ячеек [77], формирования и отрывов плюмов [44], а также исследованию возникновения осцилляций в потоке [88,102].

Конвекция Рэлея – Бенара [9, 70] является одним из наиболее простых и хорошо изученных примеров тепловой конвекции [2, 15, 17, 25, 75]. Конвекция Рэлея – Бенара представляет собой течение, которое образуется в вязкой среде при нагреве снизу и охлаждении сверху при наличии сил плавучести. Для конвективных течений характеристическим параметром является число Рэлея, определяющее поведение жидкости под воздействием сил плавучести. Если число Рэлея больше критического значения, равновесие жидкости становится неустойчивым и возникают конвективные ячейки (ячейки Бенара).

Эксперименты и численное моделирование конвекции Рэлея – Бенара традиционно фокусировались на конфигурациях с термически однородными границами [2, 66, 70, 89]. Однако в ряде реальных случаев присутствует неоднородное распределение температуры на границах, например: в мантийной конвекции, охватывающей континентальную и океаническую литосферу [36], в морской конвекции под плавучими льдами [55, 92] и в атмосферной конвекции над городским

островом тепла [32, 41, 100]. Также, в большинстве прикладных задач важную роль играют локализованные источники тепла.

В работах [10, 64, 72, 79, 87, 107] исследовались неоднородные температурные граничные условия заданные на одной из горизонтальных стенок. В работах [10, 72] изучались чередующиеся теплоизолированные и теплопроводящие участки на верхней поверхности в двухмерной и трехмерной постановках. Было выявлен порог перехода от маломасштабных ячеек, расположенных у неоднородно-нагретой верхней границы, к крупномасштабным объёмным валам при малых числах Рэлея. В работе [64] моделировалась трёхмерная конвекция Рэлея–Бенара в слое жидкости при внесении теплоизолированных полос на верхнюю границу и исследовалось влияние геометрических параметров данных полос на интенсивность теплопереноса и масштаб вихрей. В работе [107] исследовалось влияние чередующихся участков нагревателя и теплоизолятора на боковой стенке с добавлением в поток наночастиц. Показано влияние концентрации наночастиц на число Нуссельта на стенке. В работе [79] численно и экспериментально исследовались вторичные конвективные структуры, возникающие в цилиндрическом слое жидкости над локализованным источником тепла. Было показано, что по мере роста числа Рэлея наблюдаются переходы от поперечных валов к радиальным валам и их суперпозиции. В работе [87] моделировалось конвективное течение в кубической полости, когда на нижней стенке чередуются участки с теплопроводящими и теплоизолирующими свойствами. Было показано, что при неоднородных граничных условиях в турбулентной тепловой конвекции формируется крупномасштабная циркуляция, а динамика и структура этой циркуляции сильно зависят от распределения теплопроводящих участков. В работе [44] авторы исследовали как форма локального источника тепла, расположенного на дне замкнутого слоя жидкости, влияет на зарождение, развитие и устойчивость конвективных плюмов. Рассматривались различные геометрии нагревателей — треугольная, квадратная, пятиугольная и круглая — и их влияние на структуру пограничного слоя. Авторы работы [3] проводят численное исследование естественной конвекции в кубической замкнутой полости, заполненной наножидкостью, с локализованным источником тепла на нижней стенке. Показано, что при высоких числах Рэлея для чистой воды течение становится нестационарным, но введение наночастиц стабилизирует поток, возвращая его к стационарному режиму, и что увеличение объёмной доли наночастиц выше определённого предела снижает интенсивности теплового потока из-за роста вязкости и снижения подвижности потока. В работе [12] исследуется свободная конвекция в замкнутой полости, дно которой неравномерно нагревается множеством дискретных источников тепла. Авторы показывают, как распределение, размер и интенсивность этих источников влияют на

структуру потока и эффективность теплообмена внутри прямоугольной камеры. Авторы [42] анализируют характеристику и пространственную структуру свободной конвекции, возникающей над горизонтальной поверхностью, содержащей ограниченный по площади источник тепла. Основное внимание уделяется формированию восходящего плюма и сопутствующим пограничным слоям в зависимости от интенсивности нагрева и геометрии участка.

В работах [11, 53, 99] исследовались эффекты неоднородного распределения температуры на обеих горизонтальных стенках для небольших чисел Рэлея. В работе [53] исследовалось как пространственно-периодическая модуляция граничных условий на температуру влияет на порог возникновения конвекции Рэлея – Бенара. В работе [99] численно исследуется двумерная тепловая конвекция в слое жидкости, заключённом между двумя горизонтальными жёсткими стенками с пространственно-периодическим распределением температуры на границах. Показано, что при низких числах Рэлея конвекция остаётся стационарной и формирует регулярные ячейки, а с увеличением числа Рэлея поток переходит в квазипериодическое состояние с двумя или тремя основными частотами. В работе [11] приведен анализ турбулентной конвекции Рэлея – Бенара в условиях, когда на обеих горизонтальных пластинах устанавливаются синусоидальные температурные неоднородности. Показано, что даже малые по амплитуде температурные неоднородности на границах могут задавать размер и форму конвективных ячеек в турбулентном режиме.

Также существует ряд работ, посвященных свободной конвекции при однородном нагреве снизу для широкого диапазона чисел Рэлея и Прандтля [93, 105, 104, 110, 111]. В работе [105] представлен глубокий теоретический анализ устойчивости тепловой конвекции в различных конфигурациях, описывающий как процессы зарождения возмущений, так и амплитуду и форму развившихся паттернов. В работе [104] изучается развитие свободной конвекции вязкой жидкости, заключённой в щель между двумя вертикальными изотермическими пластинами с разными температурами. Получены пространственные распределения скорости, температуры и давления вдоль канала. Определено расстояние от входа в канал, на котором поток устанавливается в стационарный режим и число Нуссельта стабилизируется. В работе [110] изучается установившаяся трёхмерная ламинарная естественная конвекция внутри прямоугольного параллелепипеда, у которого две противоположные боковые стенки изотермически нагреты до разных температур, а остальные поверхности теплоизолированы. Показано, что на нагретых боковых стенках формируются продольные конвективные валы, вытягивающиеся вдоль неизотермических поверхностей. При росте Рэлея в центральной части объёма появляются поперечные вихри и

ячеистые переходные участки. В работе [111] представлен анализ ламинарного режима свободной конвекции жидкости между двумя бесконечными вертикальными параллельными пластинами, нагретой и охлаждённой до разных постоянных температур. Показано, что температурный пограничный слой у горячей пластины заметно толще, чем у холодной, что приводит к асимметрии распределения скорости и теплового потока. Авторы [93] изучают вертикальную конвекцию в прямоугольной ячейке с двумя вертикальными стенками, одна из которых нагрета, а другая охлаждена, в большом диапазоне чисел Рэлея. Определены качественные изменения (переходы режимов) в структуре потока и законах теплопереноса по мере роста числа Рэлея. В работе [82] изучается турбулентная тепловая конвекция воды в кубической ячейке с перепадом температур между вертикальными стенками и одной парой горизонтальных стенок. Показано, что даже слабый боковой нагрев меняет направление крупномасштабной циркуляции и вместо диагональной циркуляции поток выстраивается вдоль нагретых вертикальных стенок.

Изучение структуры конвективных течений в наклонных областях и областях со сложной геометрией проводилось в работах [21, 54, 101, 109]. Авторы работы [54] исследовали ламинарную естественную конвекцию внутри полости сложной С-образной формы, заполненной наножидкостью на основе воды с частицами меди. Вдоль внутренней поверхности этой полости расположены локализованные участки нагрева. Показано, что при низких Рэлея эффект добавки наночастиц наиболее заметен в узких участках полости, тогда как при высоких числах Рэлея геометрия играет менее существенную роль за счёт меньшего влияния вязкости на поток. В работе [101] изучалось влияние наклона области относительно вектора гравитации на турбулентную конвекцию Рэлея – Бенара экспериментальным и численным методами. Работа [21] посвящена численному исследованию ламинарной естественной конвекции воздуха в наклонённых прямоугольных полостях с локализованным источником тепла. Показано, что наклон полости и положение/размер локального нагревателя существенно меняют конфигурацию циркуляций и изотерм, переходы от одноячеечного к многоячеечному течению сопровождаются изменением распределений локальных чисел Нуссельта.

Исследование процессов формирования крупномасштабных когерентных структур в конвективном течении Рэлея – Бенара рассматривается в работах [31, 66, 89, 65, 77, 46]. В работе [31] проведено численное моделирование конвекции Рэлея – Бенара в плоском слое с периодическими граничными условиями при высоких числах Рэлея и показано, что конвективный поток содержит структуры крупного, но конечного размера помимо флуктуаций, обычно ассоциируемых с турбулентностью. Два типа структур разделены разрывом в пространственных

спектрах. В работе [65] методом прямого численного моделирования исследовалась конвекция Релея – Бенара в слое, где горизонтальный размер много больше вертикального. Было обнаружен процесс кластеризации тепловых плюмов, который способствует формированию крупномасштабных когерентных структур, которые представляют собой упорядоченные валы и ячейки длиной в несколько высот пограничного слоя. В работе [77] методом прямого численного моделирования исследовалась конвекция Релея – Бенара в слое с различным соотношением вертикального и горизонтального размера при больших числах Рэлея. Показано, что в потоке обнаружен чёткий разрыв в пространственном спектре между мелкими турбулентными флуктуациями и крупномасштабными суперструктурами, и горизонтальный размер таких суперструктур стабильно составляет около 6–7 высот слоя и остаётся практически неизменным при росте числа Рэлея в исследованном диапазоне. В работе [46] выполнены трёхмерные DNS-расчеты при больших числах Рэлея в областях с большим отношением горизонтального размера к высоте слоя. Показано, что формирующиеся в потоке температурные и скоростные суперструктуры когерентны и размер суперструктур монотонно растёт с увеличением числа Рэлея в определенном диапазоне.

Исследование структуры и механизмов формирования различных осцилляций в конвективном потоке приведено в работах [26, 88, 97, 102]. Авторы [97] экспериментально изучают природу низкочастотных колебаний температуры в цилиндрической установке при турбулентной естественной конвекции. Было показано, что термальные плюмы выбрасываются не периодически, а стохастически с горячей и холодной пластин, опровергая модель пульсирующего отрыва слоёв. Колебания температурного поля возникают не в пограничных слоях, а за счёт горизонтальной модуляции восходящих и нисходящих потоков крупномасштабной циркуляции. Авторы [102] исследуют, как неньютоновские жидкости ведут себя при естественной конвекции типа Рэлея – Бенара в слегка наклонённой прямоугольной полости. Показано, что вместо плавного перехода к устойчивому течению возникают периодические колебания и изменение размеров конвективных ячеек. Работа [26] посвящена численному анализу структуры течения при ламинарной естественной конвекции в квадратной полости, когда одна вертикальная стенка нагрета, а противоположная охлаждена, и к горячей стенке крепится тонкий гибкий пластинчатый элемент. Показано, что добавление гибких колеблющихся структур способно усиливать теплообмен в компактных теплообменниках. Авторы работы [88] исследуют осцилляции крупномасштабной циркуляции в течении Рэлея – Бенара. Определены характерные частоты и фазы двух колебательных мод: раскачивающей (колебания центра циркуляции вдоль горизонтальной оси) и скручивающей

(скручивающие колебания, при которых верхняя и нижняя части циркуляции вращаются в противофазе).

Также особое внимание уделяется изучению конвекции в атмосферном пограничном слое (АПС) [60]. Такие течения сопровождаются вертикальными движениями воздушных потоков, связанными с термическими потоками, облаками, грозами и мезомасштабными облачными системами. Конвективный АПС характеризуется быстрым нелокальным переносом массы, тепла, водяного пара, импульса и завихренности, который часто связан с фазовыми переходами воды и, как следствие, выделением/поглощением тепла. Неоднородный нагрев почвы в сочетании с геострофическими эффектами непосредственно вызывает крупномасштабные атмосферные циркуляции, такие как циркуляция Гадлея [28], циркуляция Уокера [91], циркуляция Маддена и Джулиана [52], а также экстремальные погодные системы, такие как тропические циклоны [71].

Теоретические исследования конвекции в АПС начались с идеализированных постановок [13, 70, 83, 84]. Затем появились исследования реалистичной конвекции сухого АПС [14, 51, 53]. Позже исследования конвекции АПС проводились уже с более сложными конфигурациями, включающими в себя учет влажности и фазовые переходы воды [8, 47]. Аналогия между механизмами образования бароклинной завихренности при наличии горизонтального градиента температуры на поверхности и наличием наклона поверхности была исследована в [49]. Формирование вихревой структуры на вершине  $v$ -образной наклонной поверхности, интенсифицирующей конвекцию, было исследовано в [39]. Много исследований посвящено морским и океаническим бризам, образующимся из-за разницы температур между морем и сушей. Обзор исследования бризовых течений представлен в [19]. В работе [108] показано, что над неоднородно нагретой поверхностью возникают уединенные тороидальные вихри (когерентные структуры, топологические солитоны). Авторы работы [113] показали, что из-за воздействия неоднородного горизонтального градиента температуры в нижней атмосфере над населенными пунктами формируются вихревые движения, заметно влияющие на характер распространения примеси в окрестности источников. Распространение примеси в городских условиях при наличии стратификации, когда перенос примеси определяется локальными циркуляционными течениями, вызываемыми в частности эффектом городского острова тепла, исследовано в работах [69, 106]. Работа [22] посвящена изучению влияния локализованного теплового источника на структуру течения над ним. Авторы рассматривают, какие возмущения в полях скорости и температуры возникают в приземном слое атмосферы в зависимости от силы и направления геострофического ветра, а также ориентации источника возмущений относительно этого ветра.

## 1.2. Численное моделирование как инструмент изучения конвективных течений

В настоящее время численное моделирование становится неотъемлемой частью исследовательской деятельности. В ряде случаев моделирование может быть выгодной альтернативой экспериментальному методу, либо являться его дополнением. В частности, в задачах гидродинамики основным преимуществом численного моделирования является получение более подробной картины течения, что позволяет проводить анализ структуры течения на более подробном уровне.

На данный момент существует множество различных способов моделирования задач гидродинамики, применяющихся в зависимости от типа задачи, требуемой точности решения и имеющихся вычислительных ресурсов. Однако принято выделять три основных подхода: метод моделирования уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS), метод крупных вихрей (LES) и метод прямого численного моделирования (DNS). Данные модели различаются соотношением между разрешаемой и моделируемой частями энергетического спектра турбулентности. Конвективные течения реализуются на различных пространственных масштабах и для их исследования могут быть использованы все приведенные выше методы моделирования, исходя из условий задачи.

### 1.2.1 DNS моделирование

Главное преимущества метода прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation - DNS) заключается в том, что интегрирование полных нестационарных уравнений Навье – Стокса и теплопереноса осуществляется без использования упрощенных моделей турбулентности. В связи с разрешением полного энергетического спектра турбулентности (до диссипативного масштаба) накладываются жесткие требования к расчетной сетке. Таким образом в расчетах методом прямого численного моделирования необходимо вычислять (разрешать) все вихри, характеризующиеся спектром волновых чисел, начиная от вихрей размером порядка характерного размера течения  $h$ , относящихся к энергетическому интервалу спектра до вихрей, относящихся к масштабу диссипации, размер которых соответствует колмогоровскому масштабу  $\lambda \approx h Re^{-\frac{3}{4}}$ . Таким образом, можно оценить необходимое число ячеек через минимальный масштаб  $N > \left(\frac{h}{\lambda}\right)^3 \approx Re^{\frac{9}{4}}$ . Отсюда видно, что несмотря на высокий уровень развития вычислительной техники, в настоящее время расчет турбулентных течений с числами Рейнольдса  $Re > 10^4$  и числами Рэлея  $Ra > 10^8$

методом прямого численного моделирования является практически невозможным. В то же время, например, для атмосферных течений наблюдаемые числа Рейнольдса могут составлять  $10^9 - 10^{10}$ , а числа Рэлея  $10^{13} - 10^{16}$ .

В связи с высокими требованиями к разрешению расчетной сетки, прямое численное моделирование в основном применяется в задачах исследования конвективных течений на масштабах до нескольких метров [67, 103]. Также данный метод может быть использован для верификации и отладки других типов численных моделей, позволяющих проводить расчеты с меньшим разрешением (LES, RANS) [90]. Прямое численное моделирование позволяет точно восстанавливать характеристики потока вблизи поверхности с неоднородной или изменяющейся температурой, различным рельефом и шероховатостью, что можно использовать для отладки граничных условий в атмосферных расчетах.

Помимо этого, прямое численное моделирование может быть использовано для изучения природы различных изолированных явлений и эффектов, наблюдаемых на более крупных масштабах, в идеализированной постановке. Пользуясь критериями подобия течений на разных масштабах, в некоторых случаях справедливо изучать природу определенных процессов и определять закономерности на более мелких масштабах, так как структура потока и основные механизмы формирования вихревых структур будут подобны при изменении масштаба течения.

### 1.2.2. LES моделирование

Моделирование методом крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES) заключается в пространственном осреднении уравнений Навье – Стокса с использованием фильтра, определяемого шагом расчетной сетки. Такой подход подразумевает разрешение напрямую всех вихрей, характерный масштаб которых больше масштаба ячеек сетки, лежащего как правило внутри инерционного интервала. Влияние вихрей более мелкого масштаба, так называемого подсеточного масштаба, учитывается с помощью той или иной подсеточной модели турбулентности. В основе этого подхода лежит предположение о том, что основная часть энергии переносится крупными вихрями. Мелкомасштабная турбулентность имеет характеристики, близкие к изотропно-однородной. Следовательно, она в большей мере поддается аналитической оценке, и может быть описана с помощью (как правило алгебраической) подсеточной модели турбулентности. Поскольку в данном подходе не осуществляется разрешение мелких вихрей, а учитывается лишь их осредненный эффект, минимальный размер ячейки может быть намного больше колмогоровского

масштаба, необходимого в случае с DNS.

LES является используется для моделирования течений в конвективных (дневных) и стабильных (ночных) пограничных слоях атмосферы [59, 63, 45]. LES-моделирование конвективного пограничного слоя оказались во многом успешными, главным образом, благодаря доминированию в потоке крупномасштабных структур [73].

В последние годы подход моделирования крупных вихрей (LES) продолжает набирать популярность в атмосферном сообществе [78, 18]. Однако недостатком этого подхода являются высокие требования к численному разрешению расчетной сетки и малый шаг по времени. Кроме того, анизотропия атмосферной турбулентности при наличии плотностной стратификации еще больше ужесточает требования к разрешающей способности LES для моделирования АПС. В устойчиво-стратифицированном случае масштабы течения в одном направлении могут стать в несколько раз меньше, чем в двух других направлениях, и гипотеза мелкомасштабной изотропности не будет справедлива до достижения очень мелких масштабов расчетной сетки [86]. Таким образом, способность метода LES представлять всю динамику потока на доступных в настоящее время сетках все еще остается под вопросом. Поэтому для практических приложений необходимы более универсальные и менее затратные в вычислительном отношении модели (например, RANS).

### 1.2.3. RANS моделирование

Метод моделирования уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу (Reynolds-Averaged Navier – Stokes equations – RANS), отличается от метода крупных вихрей наличием той или иной полуэмпирической модели турбулентности, используемой для замыкания системы на всех моделируемых масштабах течения. Такой подход позволяет исследовать конвективные течения для существенно больших чисел Рэлея в сравнении с DNS и LES методами и является наиболее распространенным подходом для моделирования течений в пограничных слоях атмосферы.

В работах [4, 35, 30, 56] представлен ряд сложных моделей динамики АПС, включающих прогностические уравнения для корреляций второго и более высоких порядков. Эти модели оказались весьма успешными в прогнозировании суточного цикла в АПС в одномерной постановке, т. е. когда задача предполагается однородной в горизонтальной плоскости. Однако при распространении на трехмерное моделирование с неоднородными условиями эти модели обычно демонстрируют слабую численную устойчивость и ухудшение сходимости численной системы из-за большого количества разрешаемых уравнений.

В практическом метеорологическом моделировании широко используются модели с одним дополнительным прогностическим уравнением для замыкания уравнений Рейнольдса (модели первого порядка) [81, 76], при этом накладываются дополнительные модельные предположения согласно теории подобия Мони́на – Обухова. Такие модели слишком сильно основаны на полуэмпирических соотношениях, и их обычно трудно распространить на сложное трехмерное моделирование, где важны более мелкие локальные детали (например, распространение примеси от известного источника в городской среде). В большинстве этих моделей используется алгебраическая параметризация длины смешения, что затрудняет представление свойств потока в неоднородных сценариях со сложным рельефом и городской застройкой.

Компромиссный подход представлен двухпараметрическими RANS-моделями, в которых длина смешения динамически рассчитывается на основе соотношения двух прогностических переменных (как правило, энергии турбулентности и скорости ее диссипации) [6, 29, 48, 80] и гипотезы градиентной турбулентной диффузии. Для таких моделей можно распространить моделирование на неоднородные трехмерные случаи [32, 33, 40]. Они обычно обладают высокой численной стабильностью и гораздо менее требовательны к вычислениям по сравнению с LES или DNS.

Существует два основных типа двухпараметрических моделей RANS:  $k - \omega$  [94] и  $k - \varepsilon$  [37]. Обе модели используют одно и то же прогностическое уравнение для кинетической энергии турбулентности (ТКЕ или  $k$ ), но имеют разные вторые прогностические переменные. Модель  $k - \varepsilon$  использует скорость диссипации  $\varepsilon$  в качестве второй прогностической переменной, тогда как модель  $k - \omega$  использует уравнение для удельной скорости диссипации  $\omega = \varepsilon / (C_\mu k)$  (обратно пропорциональной масштабу времени турбулентности). Для замыкания системы уравнений используются алгебраические выражения для компонент тензора напряжений Рейнольдса. Модель  $k - \omega$  считается более точной в пристеночной области, а модель  $k - \varepsilon$  — в свободном течении. Хотя модель  $k - \omega$  (и ее модификации [57]) более распространена для инженерных течений, для атмосферных течений из-за гораздо большего числа Рейнольдса обычно нецелесообразно интегрировать переменные до стенки. Вместо этого используется подход с использованием пристеночных функций в предположении, что первый узел сетки уже находится в развитом слое турбулентности, где модель  $k - \varepsilon$  работает лучше. Более того, модель  $k - \omega$  гораздо более чувствительна к граничным условиям в свободном потоке, особенно если входные условия турбулентны. Обычно легче задать хорошие условия на входе для  $\omega$ , когда турбулентность на входе в расчетную область низкая; однако это не относится к АПС, особенно если учесть, что уровень

турбулентности на входе должен меняться во время дневных/ночных изменений АПС. Эти факторы делают модель  $k - \varepsilon$  более подходящей для моделирования конвекции в атмосферном пограничном слое, чем модель  $k - \omega$ . Дополнительные ограничения моделей  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$  описаны в работах [34, 58].

### 1.3. Выводы

С начала XX века термогравитационная конвекция является предметом интенсивных исследований. За последние десятилетия выполнено множество работ, направленных как на детальное изучение структуры вертикальной и горизонтальной конвекции в классических постановках, так и на анализ динамики конвективных течений в областях со сложной геометрией. Значительное внимание уделено процессам формирования крупномасштабных структур в плоском слое, циркуляциям над локализованными источниками тепла, особенностям течений при наличии множества дискретных источников нагрева, а также динамическим процессам и вторичным течениям, возникающим в таких системах. Отдельный пласт исследований посвящён исследованию динамических колебательных процессов в конвективных течениях, формирующихся при переходах между различными модами конвекции. Существенный интерес представляют и работы, рассматривающие конвективные течения, возникающие под воздействием поверхностных тепловых неоднородностей. Однако в большинстве из них основное внимание уделяется средним характеристикам потока, что делает актуальным задачу по детальному исследованию динамической структуры конвективного течения, образующегося под воздействием линейно-протяженной поверхностной тепловой неоднородности, которому посвящена данная работа.

## Глава 2. Исследование влияния линейно-симметричной поверхностной температурной неоднородности на конвекцию Рэлея – Бенара

В конвективном атмосферном пограничном слое существенное влияние на горизонтальный перенос тепла, влаги и других примесей оказывают локальные микроциркуляции, образованные за счет тепловой конвекции воздуха. При этом динамика таких циркуляций зависит от распределения температуры на подстилающей поверхности, которое может быть неоднородным вследствие различных факторов. Одним из источников таких неоднородностей являются крупные водоемы, которые, из-за высокой теплоемкости воды, незначительно меняют свою температуру в течение суток. Температура окружающей водоем поверхности может меняться с амплитудой до нескольких десятков градусов за то же время. Дополнительный эффект может оказывать городской «остров тепла», в котором температура поверхности будет зависеть от плотности городской застройки. Циркуляции, образованные в таких конвективных течениях, могут взаимодействовать между собой, приводя к появлению новых динамических эффектов, таких как периодические расширения и сужения взаимодействующих областей циркуляции с образованием колебательных процессов. Эффекты таких колебаний напоминают распространение гравитационных волн в стратифицированной атмосфере, но механизм их появления может быть не связан со стратификацией.

В расчетах методом U-RANS [32], выполненных для г. Красноярска в зимний период, был замечен эффект низкочастотных колебаний положения восходящего потока над источником тепла (под которым подразумевалась незамерзающая р. Енисей), который оказывал заметное влияние на горизонтальный перенос примеси. Данные колебания сопровождалось периодическим переходом воздуха и переносимой им примеси с одного берега реки, где преобладал один тип циркуляции, на другой берег через область восходящего потока над незамерзающей рекой. Распределение примесей из-за этого становилось неоднородным, возникали локальные пятна повышенной и пониженной концентрации примеси вблизи поверхности. В критических обсуждениях были высказаны предположения о возможном влиянии численной модели турбулентности (RANS) на возникновение данного эффекта.

Природа данных осцилляций не была исследована ранее и является предметом исследования в данной работе. Чтобы понять природу этого явления необходимо изолировать причины, влияющие на его формирование. По аналогии с [32], проявления указанного эффекта можно ожидать в идеализированной постановке при наличии на нижней поверхности линейного участка повышенной

температуры, плавно спадающей к периферии расчётной области, на фоне отрицательного вертикального градиента температуры, обусловленного более холодной верхней стенкой.

Данная часть работы посвящена численному исследованию влияния линейно-симметричной температурной неоднородности на нагретой поверхности на образование крупномасштабных вихревых структур и формирование низкочастотных колебаний потока методом прямого численного моделирования (DNS) в приближении Буссинеска для плавучести, что позволило проанализировать влияние возникающих эффектов турбулентности на структуру потока. Было проведено две серии расчетов для исследования структуры потока в зависимости от изменения различных условий. В первой части исследования расчеты проводились для различных чисел Рэлея путем изменения кинематической вязкости при фиксированном числе Прандтля. Во второй части исследования расчеты проводились при постоянной кинематической вязкости и постоянном вертикальном градиенте температуры, варьируя значение горизонтального градиента температуры на верхней и нижней стенках.

## 2.1 Детали расчетов

Численные расчеты, представленные в данной главе, проводились с помощью открытого программного кода MicroHH 1.0 ([www.microhh.org](http://www.microhh.org)), созданного для расчетов атмосферных течений методами DNS и LES. Данный код был многократно предварительно протестирован на различных канонических конфигурациях [85, 81], а также верифицирован на результатах классических атмосферных экспериментов [81].

Одна из особенностей данного программного кода заключается в том, что уравнение Пуассона для определения полей давления разрешается спектральным методом (в пространстве Фурье). Данная методика вычисления значительно сокращает время расчета в сравнении с другими методами. Использование такого метода расчета давления представляется возможным только при использовании периодических граничных условий на боковых границах. На верхней и нижней границах можно ставить граничные условия произвольного вида.

Данный программный код использует дополнительные виртуальные ячейки, на границе расчетной области, чтобы избежать необходимости несимметричных шаблонов для дифференциальных операторов вблизи границ расчетной области. Значения полей в виртуальных ячейках определяются с помощью граничных условий [62].

В расчетах использовались компактные схемы четвертого порядка точности по пространству

и схемы Рунге – Кутта третьего порядка точности по времени. Для такой схемы требуется хранение двух полей для каждой переменной: с текущими значениями переменной и с ее производными по времени. Код предоставляет два варианта схем дискретизации процессов по времени: трехшаговую схему третьего порядка [95] и пятишаговую схему четвертого порядка [16]. В представленных расчетах использовалась схема третьего порядка. Шаг по времени был переменным и определялся максимальным значением критерия Куранта  $CFL = 0.15$ .

Программный пакет MicroNH 1.0 использует шахматную Arakawa C-сетку [7]. При такой дискретизации скалярные величины определяются в центре каждой ячейки, а компоненты векторов определяются в серединах соответствующих граней. Данный программный пакет позволяет работать со сгущенными по вертикальной компоненте сетками. Такая структура обеспечивает компактные размеры вычислительных шаблонов и препятствует развитию осцилляций из-за рассогласования между полем давления и скорости, характерных для совмещенных сеток.

В работе методом прямого численного моделирования (DNS) решались уравнения Навье – Стокса и переноса тепла в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{n}_z b \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \vec{u}\nabla b = \frac{\nu}{Pr}\nabla^2 b \quad (2.2)$$

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad (2.3)$$

где  $\vec{u}$  (м/с) – поле скорости,  $\nu$  (м<sup>2</sup>/с) – кинематическая вязкость,  $p$  (Па) – поле давления,  $b = -\beta g(T - T_0)$  (м/с<sup>2</sup>) – скалярное поле «плавучести»,  $Pr = 1$  – число Прандтля,  $\vec{n}_z$  – единичный вектор в вертикальном направлении. Плотность  $\rho$  задавалась постоянной и равной 1 кг/м<sup>3</sup>.

### 2.1.1. Детали расчетов при различных значениях вязкости среды

Исследовалась конфигурация с распределением поля плавучести  $b$  на нижней границе области в виде функции Гаусса в направлении оси  $Ox$ :

$$b_s(x)/b_{max} = \exp\left(-\frac{(x - 0.5L_x)^2}{(0.16L_x)^2}\right) \quad (2.4)$$

Здесь  $L_x$  – размер расчетной области в поперечном направлении (Таблица 2.1). Среднее значение  $b_s(x)$  на нижней стенке составляет  $\approx 0.284$  м/с<sup>2</sup>, максимальное  $b_{max} = 1$  м/с<sup>2</sup>. На верхней стенке задавалось постоянное значение  $b = -0.5$  м/с<sup>2</sup>. Проводились расчеты с различной кинематической вязкостью  $\nu$  в диапазоне от  $2 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с до  $2 \times 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с. Так как число Прандтля было фиксировано в

расчете и равнялось 1, то коэффициент температуропроводности среды менялся пропорционально изменению кинематической вязкости. Из-за неоднородной температуры на нижней стенке, числа Рэлея можно рассчитывать по различным значениям  $b$ . Использовались два обозначения  $Ra_{max} = \frac{Pr \Delta b_{max} L_z^3}{\nu^2}$ , и  $Ra_{mean} = \frac{Pr \Delta b_{mean} L_z^3}{\nu^2}$ , где  $\Delta b_{max} = 1.5 \text{ м/с}^2$  – разница между максимальным значением  $b$  на нижней границе и значением  $b$  на верхней границе,  $\Delta b_{mean} = 0.784 \text{ м/с}^2$  – разница между средним значением  $b$  на нижней границе и значением  $b$  на верхней границе.

Для параметризации задачи введем скорость «свободного падения»  $w_b = \sqrt{\Delta b_{mean} L_z} = 0.44 \text{ м/с}$ . С помощью данной скорости можно ввести характеристический масштаб времени  $t_b = L_z/w_b = 0.568 \text{ с}$ , который будет использоваться ниже для обезразмеривания найденных периодов и частот колебаний положения восходящего потока. Также можно ввести аналог скорости «свободного падения» через средний перепад плавучести  $b$  вдоль горизонтальной оси  $\Delta b/\Delta x \approx 2/L_x$ ,  $w_h = \sqrt{\Delta b/\Delta x \cdot L_z^2} \approx 0.22 \text{ м/с}$ .

Таблица 2.1 - Параметры 3D DNS-расчетов при изменении вязкости среды

№	$L_x \times L_y \times L_z, \text{ м}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$\nu, \text{ м}^2/\text{с}$	$Ra_{max}$	$Ra_{mean}$	$Re$	$\varepsilon, \text{ м}^2/\text{с}^3$	$\eta, \text{ м}$
1.1	2.5×2.5×0.25	360×360×128	2·10 <sup>-4</sup>	5.86·10 <sup>5</sup>	3.06·10 <sup>5</sup>	300	4·10 <sup>-3</sup>	6.6·10 <sup>-3</sup>
1.2	2.5×2.5×0.25	600×600×192	6.3·10 <sup>-5</sup>	5.86·10 <sup>6</sup>	3.06·10 <sup>6</sup>	1000	3.1·10 <sup>-3</sup>	3·10 <sup>-3</sup>
1.3	2.5×2.5×0.25	1024×1024×256	2·10 <sup>-5</sup>	5.86·10 <sup>7</sup>	3.06·10 <sup>7</sup>	3000	1.5·10 <sup>-3</sup>	1.5·10 <sup>-3</sup>

Где  $\varepsilon = 2\nu\langle(\partial u_i/\partial x_j)(\partial u_i/\partial x_j)\rangle$  – средняя скорость диссипации энергии по расчетной области;  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{0.25}$  – колмогоровский микромасштаб.

Параметры серии расчетов для различных чисел Рэлея при изменении кинематической вязкости приведены в Таблице 2.1.

Таблица 2.2 - Зависимость средней скорости диссипации энергии от разрешения сетки ( $Ra_{max} = 5.86 \times 10^7$ )

№	$L_x \times L_y \times L_z, \text{ м}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$\nu, \text{ м}^2/\text{с}$	$\varepsilon, \text{ м}^2/\text{с}^3$
2.1	2.5×2.5×0.25	512×512×128	2×10 <sup>-5</sup>	1.17×10 <sup>-3</sup>
2.2	2.5×2.5×0.25	1024×1024×256	2×10 <sup>-5</sup>	1.5×10 <sup>-3</sup>
2.3	2.5×2.5×0.25	1024×1024×512	2×10 <sup>-5</sup>	1.52×10 <sup>-3</sup>

Для определения необходимого размера расчетной ячейки были проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток с вычислением средней скорости диссипации (Таблица 2.2). Для случая с максимальным рассмотренным числом Рэлея ( $Ra_{max} = 5.86 \times 10^7$ ) сгущение сетки свыше разрешения  $N_x \times N_y \times N_z = 1024 \times 1024 \times 256$  узлов не дает существенного изменения значения

$\varepsilon$ , что говорит о достаточности данного разрешения для проводимых расчетов. Аналогичные вычисления были сделаны и для остальных рассмотренных случаев. Таким образом, были найдены оптимальные сетки, для всех трех рассмотренных случаев с размером ячеек, необходимым для разрешения всего спектра масштабов течения. Параметры расчетных сеток представлены в Таблице 2.1. Следует отметить, что сетка была однородной в горизонтальном направлении, но плавно сгущалась в вертикальном направлении вблизи стенок, что обеспечивало необходимое разрешение в пограничных слоях течения. Расчетная область представлена на Рисунке 2.1.

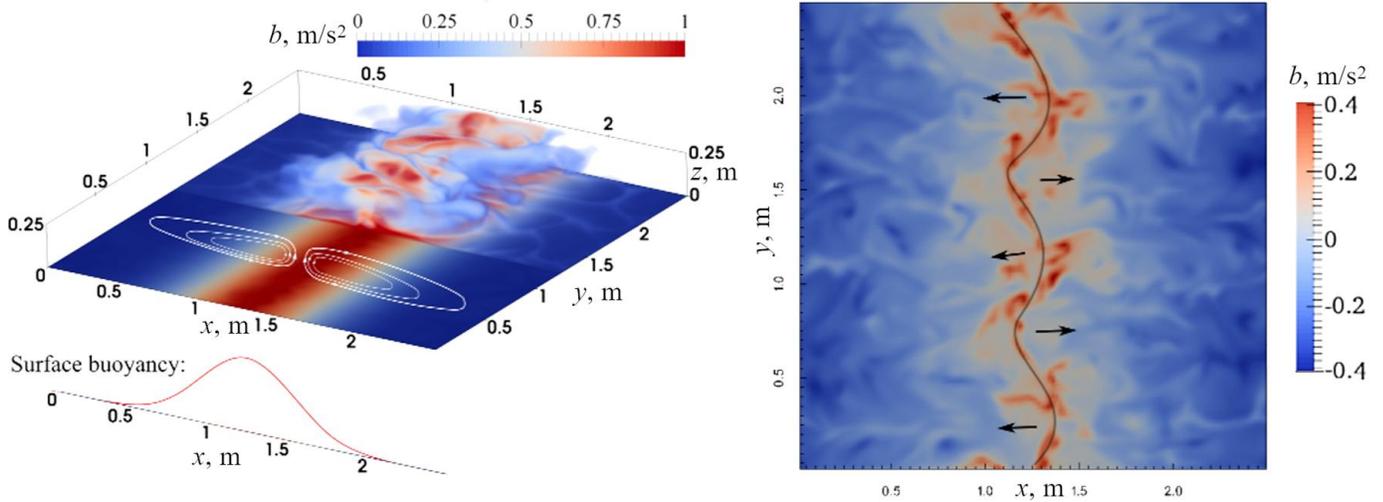


Рисунок 2.1 - Слева: схема расчетной области и распределение плавучести  $b$  на нижней границе и в объеме течения для расчетов 1.1–1.3 (Таблица 2.1). Справа: распределение плавучести в горизонтальном сечении расчета ( $z = 0.3L_z$ ,  $Ra_{\max} = 5.86 \times 10^5$ ) и схема колебаний положения центрального восходящего потока

### 2.1.2. Детали расчетов при различных значениях горизонтального градиента температуры на стенках

Также исследовалась конфигурация с симметричными распределениями поля плавучести  $b$  на горизонтальных границах области в виде функции Гаусса в направлении оси  $Ox$ , на нижней границе:

$$b(x)_{bottom} = \Delta b_z + \Delta b_x \cdot \exp\left(-\frac{(x - 0.5L_x)^2}{(0.08L_x)^2}\right) \quad (2.5)$$

, на верхней границе:

$$b(x)_{top} = \Delta b_x \cdot \exp\left(-\frac{(x - 0.5L_x)^2}{(0.08L_x)^2}\right). \quad (2.6)$$

Таблица 2.3 - Параметры 3D DNS-расчетов при изменении амплитуды горизонтального градиента

№	$L_x \times L_y \times L_z$ , м	$N_x \times N_y \times N_z$	$\nu$ , м <sup>2</sup> /с	$Ra$	$\Delta b_z$ , м/с <sup>2</sup>	$\Delta b_x$ , м/с <sup>2</sup>
3.1	5×5×0.25	1024×1024×256	2·10 <sup>-4</sup>	4·10 <sup>5</sup>	1	0
3.2	5×5×0.25	1024×1024×256	2·10 <sup>-4</sup>	4·10 <sup>5</sup>	1	0.25
3.3	5×5×0.25	1024×1024×256	2·10 <sup>-4</sup>	4·10 <sup>5</sup>	1	0.5
3.4	5×5×0.25	1024×1024×256	2·10 <sup>-4</sup>	4·10 <sup>5</sup>	1	1
3.5	5×5×0.25	1024×1024×256	2·10 <sup>-4</sup>	4·10 <sup>5</sup>	1	2
3.6	5×5×0.25	1024×1024×256	2·10 <sup>-4</sup>	4·10 <sup>5</sup>	1	3

Проводились расчеты с постоянной кинематической вязкостью  $\nu$  равной  $2 \times 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с. Параметры расчетов при различных значениях горизонтального градиента температуры приведены в Таблице 2.3.

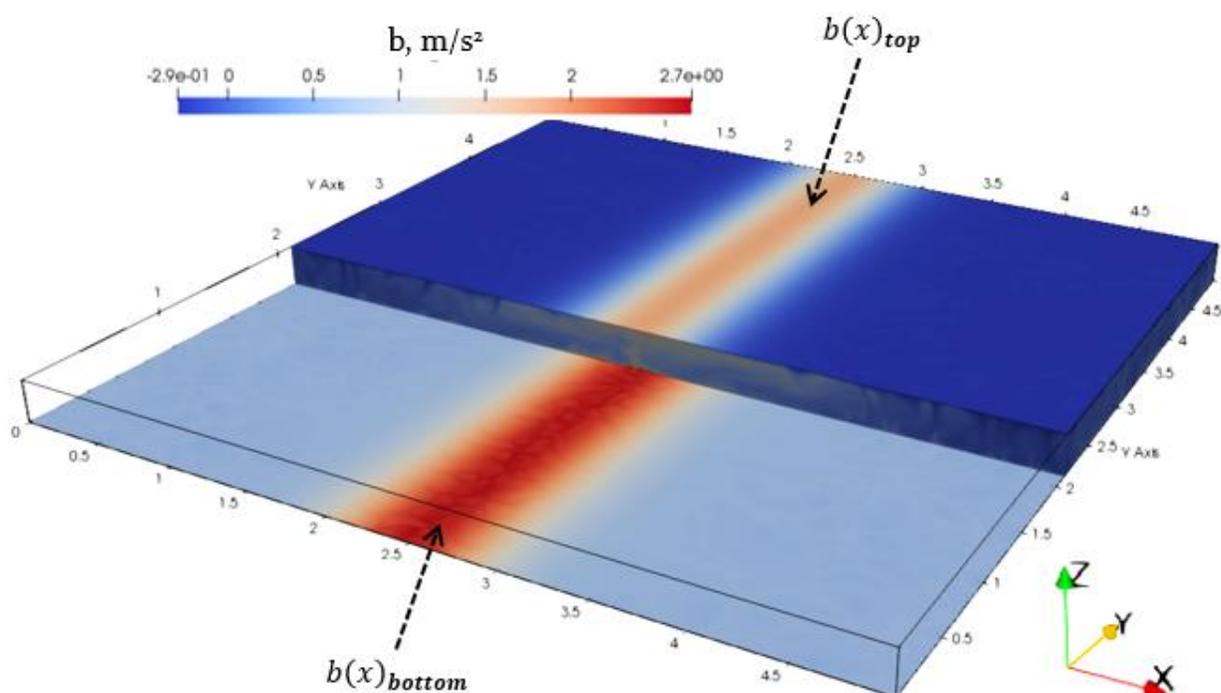


Рисунок 2.2 - Схема расчетной области и распределения плавучести  $b$  на нижней и верхней границах расчетной области для расчетов 3.1–3.6 (Таблица 2.3)

Расчетные сетки были однородными в горизонтальном направлении, но плавно сгущались в вертикальном направлении вблизи стенок, что обеспечивало необходимое разрешение в пограничных слоях течения. Расчетная область представлена на Рисунке 2.2. Отметим, что для данной серии расчетов область была в два раза шире в горизонтальных направлениях (отношение горизонтального и вертикального масштабов равнялось 20), чем в расчетах для различных чисел Рэлея, чтобы уменьшить влияние периодических граничных условий.

## 2.2. Результаты трехмерных расчетов при различных значениях вязкости среды.

В первую очередь был проведен тестовый расчет классического течения Рэлея – Бенара для  $Ra = 5.86 \cdot 10^5$  с целью верификации используемого решателя. На верхней и нижней границах области задавались фиксированные значения на поле плавучести:  $b_{bottom} = 1$ ,  $b_{top} = -0.5$ . Расчет проводился до формирования полностью развитого течения.

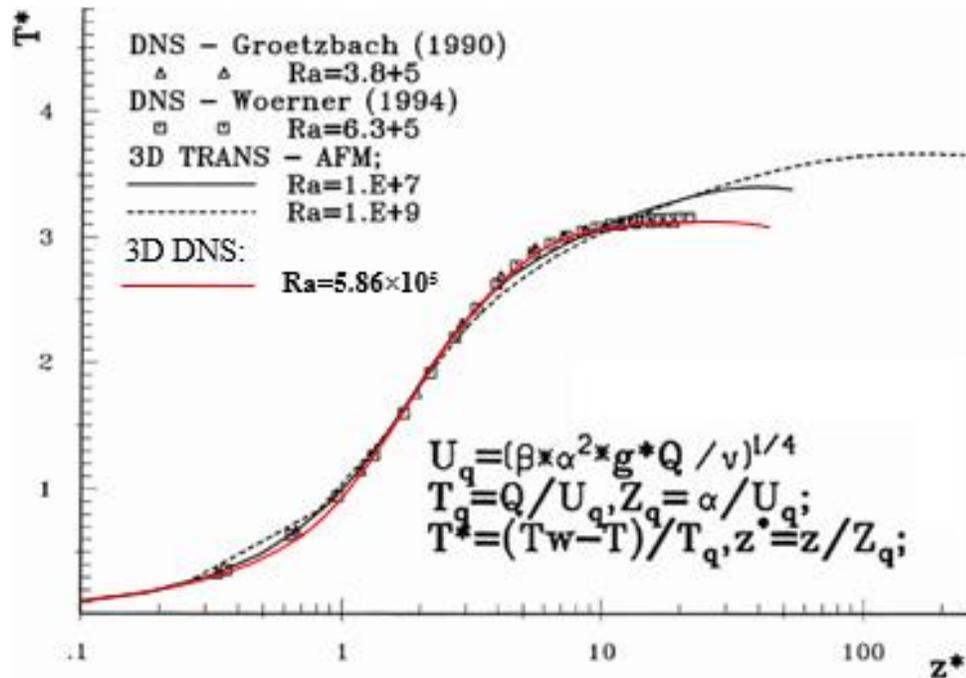


Рисунок 2.3 - Верификация профиля температуры для течения Рэлея – Бенара [29] для  $Ra = 5.86 \cdot 10^5$

Было получен осредненный в горизонтальной плоскости и по времени вертикальный профиль температуры и представлен в безразмерных переменных, описанных в [29], для сравнения с результатами классических расчетов конвекции Рэлея– Бенара. Результаты сравнения представлены на рисунке 2.3. Видно, что полученный профиль хорошо согласуется с остальными данными для аналогичных чисел Рэлея, что говорит о корректности выбранной модели и о достаточном разрешении расчетной сетки.

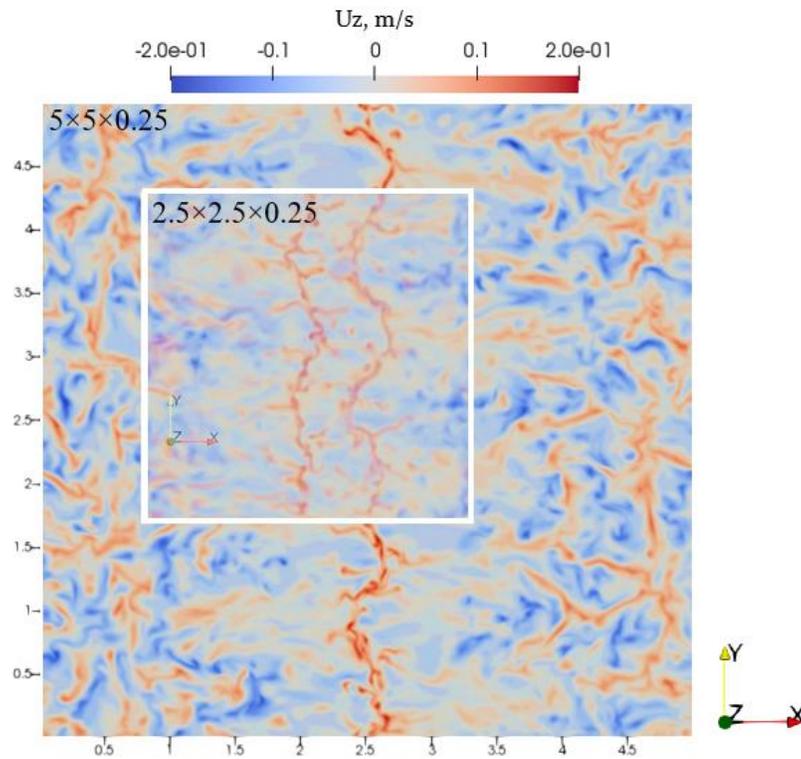


Рисунок 2.4 - Мгновенные поля вертикальной компоненты скорости в горизонтальном сечении в середине области при разных горизонтальных размерах расчетных областей:  $2.5 \times 2.5 \times 0.25$  м и  $5 \times 5 \times 0.25$  м для  $Ra = 5.86 \cdot 10^5$

Также была проведена пара дополнительных тестовых расчетов, чтобы сравнить характеристики течений при одинаковой вязкости и при одинаковых распределениях поля плавучести на стенках  $b_s(x)$  из уравнения (2.4), но при разных горизонтальных размерах области  $2.5 \times 2.5 \times 0.25$  м и  $5 \times 5 \times 0.25$  м. Результаты моделирования представлены на рисунке 2.4.

Видно, что картина течений и геометрия формирующихся структур схожа. Можно заметить, что для расчета с размером области  $5 \times 5 \times 0.25$  м вблизи стенок  $x = 0$  м и  $x = 5$  м формируются упорядоченные структуры, качественно напоминающие ячейки Бенара. На основе этих данных можно сделать вывод, что формирующиеся колебательные структуры имеют ограниченный размер в направлении  $x$ , который определяется интенсивностью горизонтальных циркуляций, и формируются такие структуры за счет взаимодействия вертикального и горизонтального температурных градиентов, а не по причине периодических граничных условий на боковых стенках.

Для определения зависимости характеристик низкочастотных колебаний от числа Рэлея, была проведена серия расчетов 1.1–1.3 (Таблица 2.1) при различных значениях кинематической вязкости. На Рисунке 2.1 представлена схема расчетной области, используемой в данной серии расчетов.

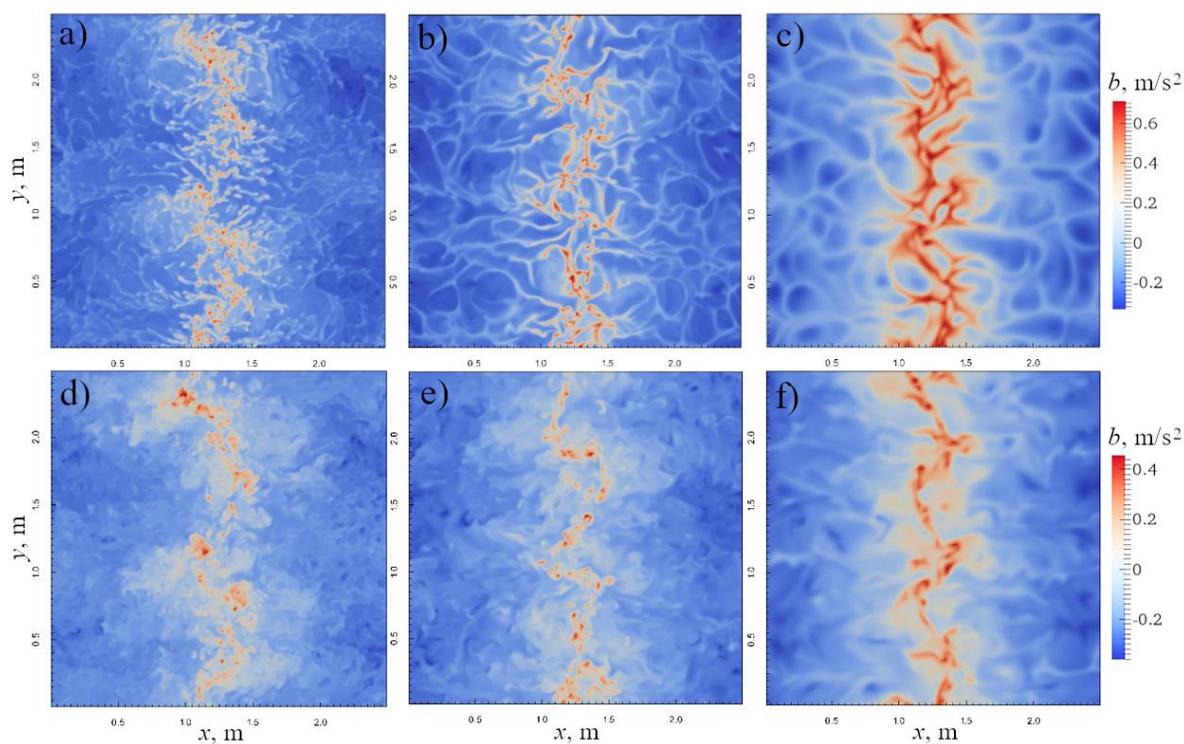


Рисунок 2.5 - Мгновенные распределения плавучести  $b$  в горизонтальных сечениях  $z = 0.1L_z$  (a,b,c),  $z = 0.3L_z$ (d,e,f) для случаев  $Ra_{\max} = 5.8 \times 10^7$ (a,d),  $Ra_{\max} = 5.8 \times 10^6$  (b,e) и  $Ra_{\max} = 5.8 \times 10^5$ (c,f)

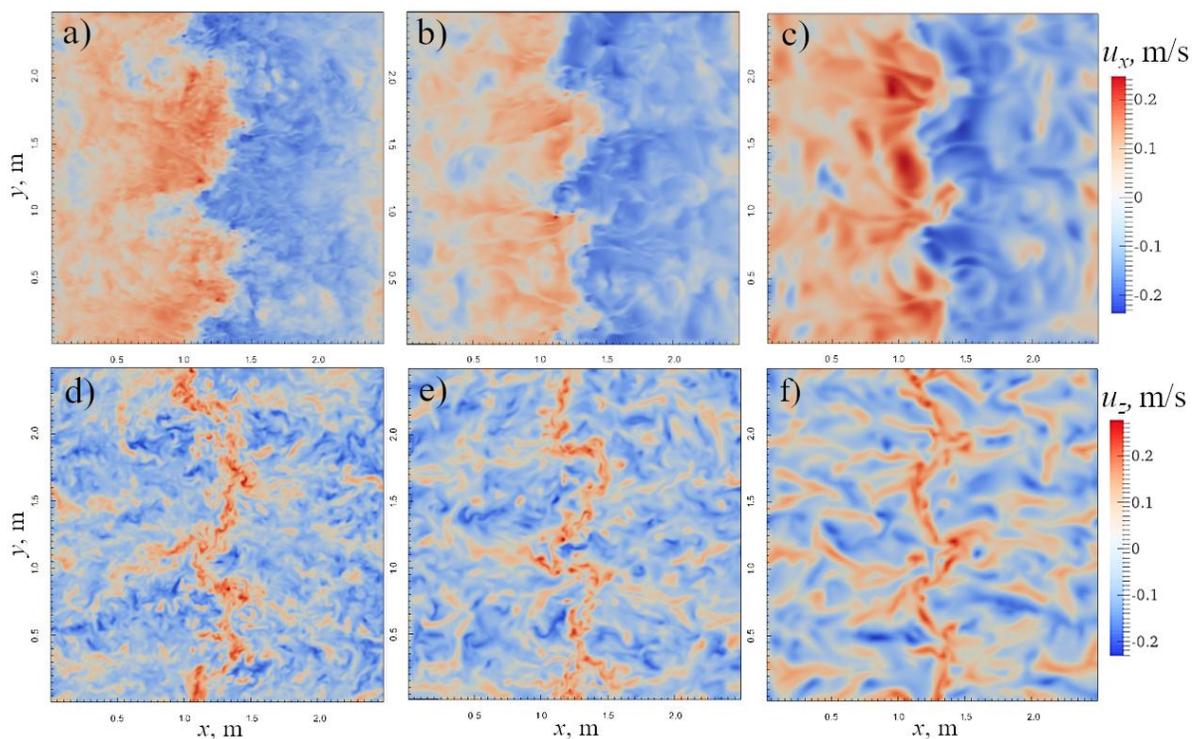


Рисунок 2.6 - Мгновенные поля поперечной ( $u_x$ ) (a,b,c) и вертикальной ( $u_z$ )(d,e,f) компонент скорости для горизонтального сечения на высоте  $z = 0.3L_z$  для чисел Рэлея  $5.8 \times 10^7$ (a,d),  $Ra = 5.8 \times 10^6$  (b,e) и  $Ra = 5.8 \times 10^5$ (c,f)

На Рисунках 2.5 и 2.6 представлены горизонтальные сечения мгновенных полей плавучести и компонент скорости на двух разных высотах. Как видно из рисунков, центральный восходящий поток, находящийся над областью максимума поверхностной плавучести, имеет искривленную «пилообразную» форму в горизонтальном сечении, при этом зубья пилы во время эволюции потока периодически меняются на впадины, как показано на Рисунке 2.1 (справа), таким образом в потоке наблюдаются низкочастотные колебания. Этот процесс наблюдается для всех рассмотренных конфигураций. При таких колебаниях возникает периодический перенос вещества из одной циркуляционной ячейки в другую через область центрального восходящего потока.

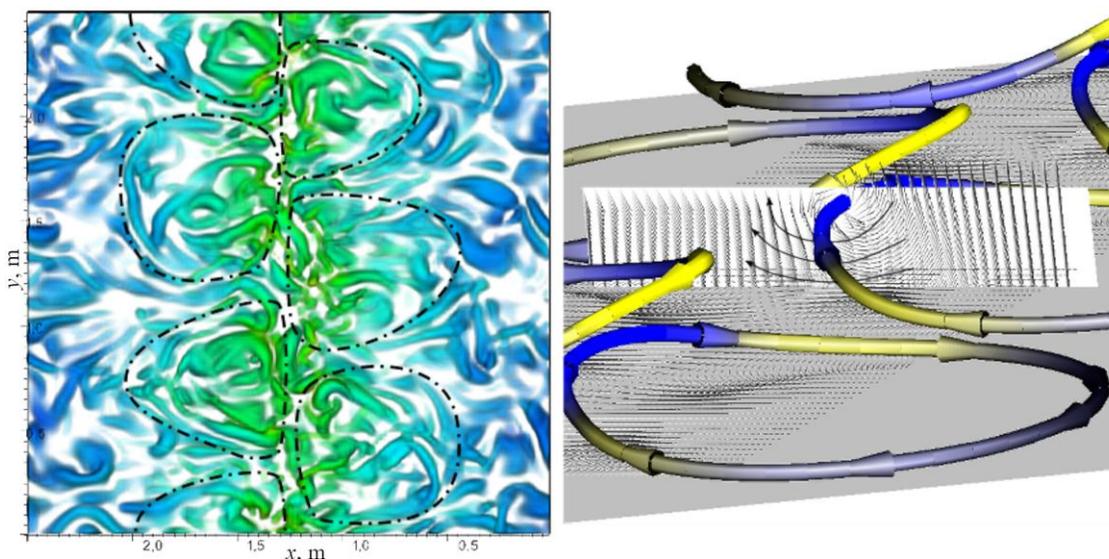


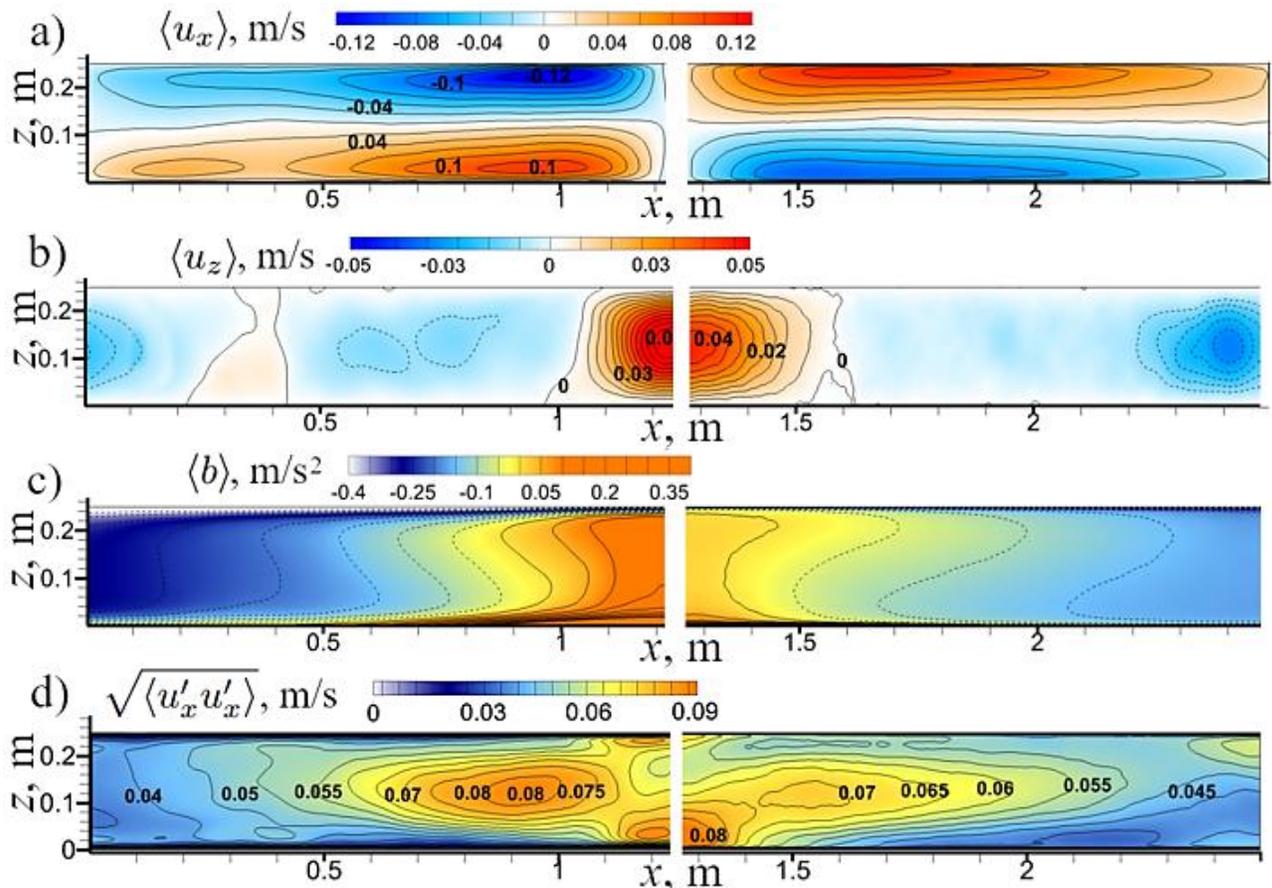
Рисунок 2.7 - Слева: изоповерхности Q-критерия ( $Q = 1000\text{c}^{-2}$ ) вычисленного по мгновенной скорости ( $Ra = 5.8 \times 10^5$ ), линиями показаны границы прилегающих к центральному восходящему потоку конвективных ячеек. Справа: иллюстрация взаимодействия отдельных вихрей с помощью закона Био – Савара и возникновения горизонтальной скорости, приводящей к колебаниям положения восходящего потока

Конвективные ячейки, примыкающие с разных сторон к центральному восходящему потоку, располагаются со смещением в половину размера ячейки, то есть, центр одной ячейки находится рядом с краем другой ячейки (Рисунок 2.7). Таким образом, наблюдается периодическое изменение положения восходящего потока, сопровождающееся переносом вещества из нижней части одной области циркуляции в верхнюю часть противоположной области циркуляции, что видно по распределениям горизонтальной и вертикальной компонент скорости (Рисунок 2.6).

Изменение формы восходящего потока предположительно происходит по следующему механизму. При смещении конвективной ячейки к области повышенной температуры происходит подъем одной из ее сторон за счет восходящего потока. При подъеме, край ячейки, представляющий

собой горизонтальную вихревую трубку, изгибается. Данный изгиб создает ненулевую вертикальную завихренность и за счет этого начинает индуцировать горизонтальную скорость, аналогично вихревой паре (вихревому диполю) (Рисунок 2.7 справа). За счет индуцированной скорости вертикальные участки вихрей переносят друг друга и окружающую жидкость в горизонтальном направлении через положение максимума поверхностной температуры на противоположную сторону области. При таком движении происходит перенос вещества из одной половины течения в другую через центральный восходящий поток. При существенном отклонении от центра горизонтальный импульс затухает и подавляется за счет стремления восходящего потока вернуться в центральное положение. Таким образом, формируется колебательный процесс, поддерживаемый за счет конвективного течения.

Наблюдения за мгновенными полями (Рисунки 2.5 и 2.6) показывают наличие в потоке низкочастотных колебаний с пространственным масштабом порядка  $L_x/3$  и временным масштабом порядка 28-35  $t_b$ .



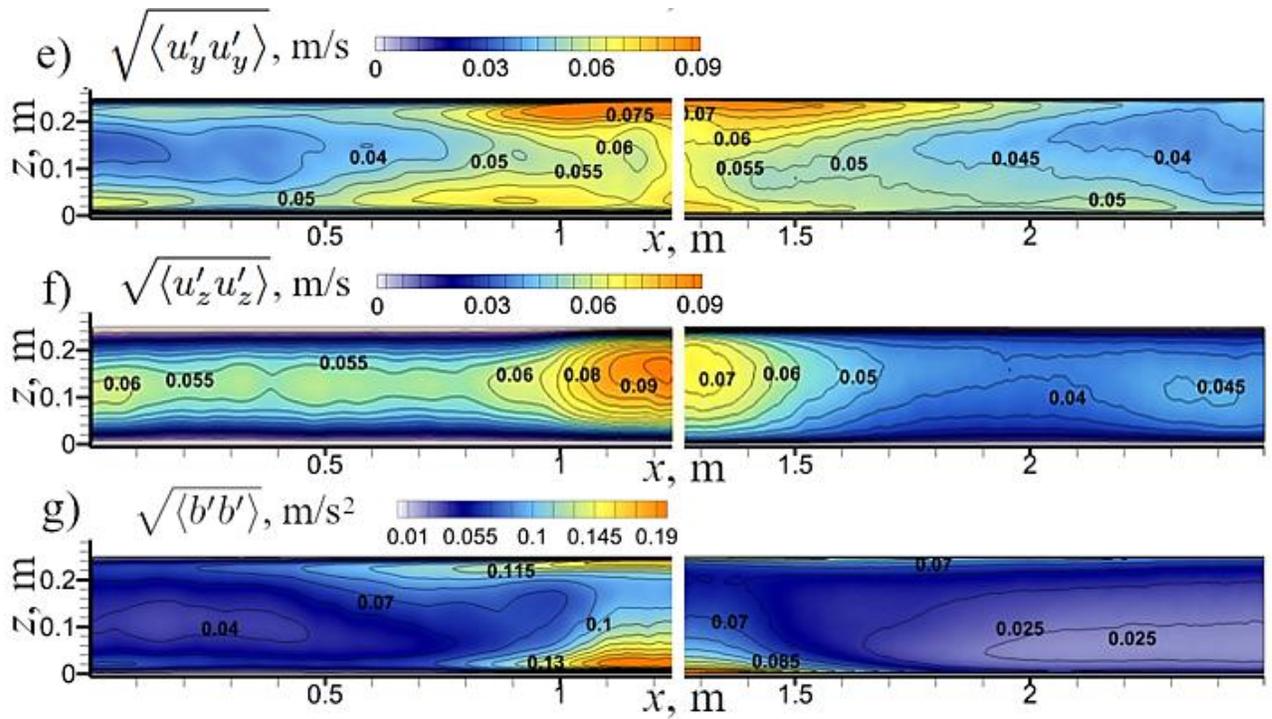


Рисунок 2.8 - Средние по времени поля скорости (а),(б), плавучести (с) и среднеквадратичных отклонений компонент скорости (д),(е),(ф) и плавучести (г) в поперечном сечении для трехмерных расчетов (слева  $Ra=5.8 \times 10^5$ , справа  $Ra=5.8 \times 10^7$ ). Осреднение проводилось по времени (период осреднения  $\sim 170t_b$ ) и координате  $y$

Средняя скорость циркуляционного течения при этом находится в диапазоне от  $-0.12$  м/с до  $0.12$  м/с (Рисунок 2.8). Это говорит о горизонтальном градиенте поверхностной плавучести  $b$  и связанной с этим бароклинной генерации завихренности как об основных механизмах, приводящих к горизонтальному переносу конвективных ячеек. Поделив горизонтальный масштаб ячеек ( $L_x/3$ ) на среднюю горизонтальную скорость ( $0.12$  м/с) получим время прохождения ячейки к центральному восходящему потоку  $\approx 12t_b$ . Для того, чтобы колебания вернулись в изначальную фазу, это время нужно удвоить, полученная оценка  $t \approx 24t_b$  близка к наблюдаемому периоду колебаний.

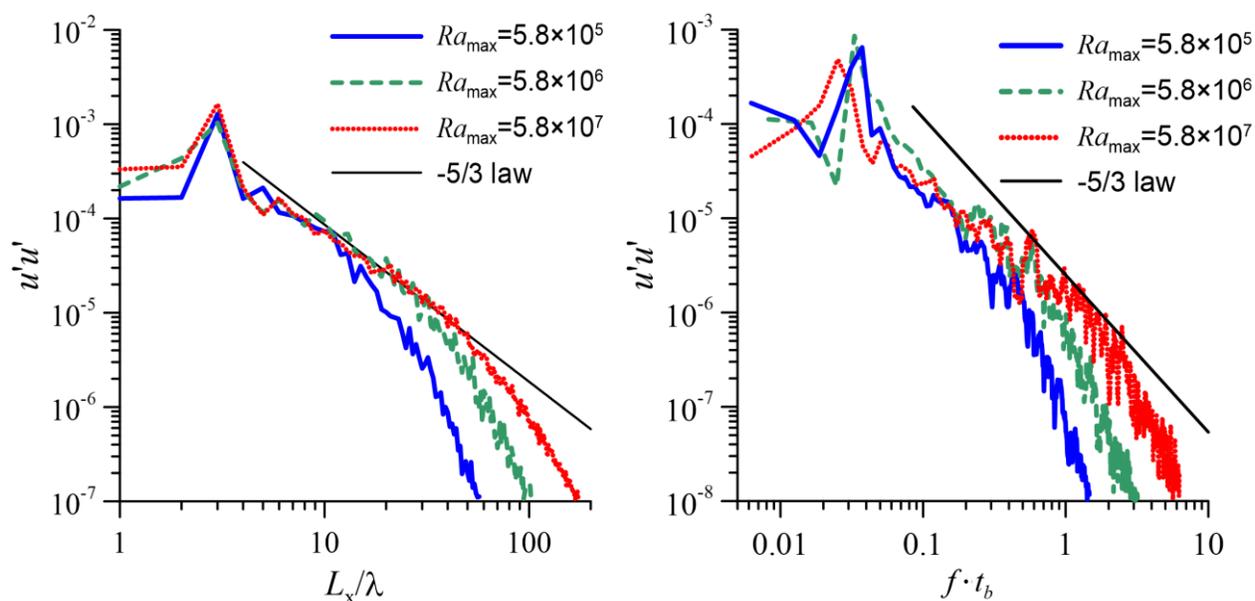


Рисунок 2.9 - Пространственные (слева) и временные (справа) спектры  $x$ -компоненты скорости для различных  $Ra$  в центре расчетной области. Пространственные спектры измерялись вдоль оси  $y$ , на высоте  $0.3L_z$  и осреднялись по времени за период  $10t_b$ ; временные спектры измерялись на высоте  $0.3L_z$  в центре расчетной области (интервал вычисления спектра  $\sim 170t_b$ )

Данные колебания отражены в пространственных и временных энергетических спектрах турбулентности в виде пиков на соответствующих масштабах (Рисунок 2.9), где  $f$  (Гц) – линейная частота,  $\lambda$  (м) – длина волны. Рассмотрение пространственных спектров скорости вдоль центральной оси (Рисунок 2.9 слева) показывает наличие в них пика на длинах волн порядка трех расстояний между стенками  $3 \cdot L_z$  для всех рассмотренных случаев. Пики соответствуют основной моде горизонтальных колебаний положения восходящего потока. Временные спектры (Рисунок 2.9 справа) имеют пики на частоте колебаний, которая слегка уменьшается с увеличением числа Рэлея. Помимо этого, в спектрах виден растущий с увеличением числа Рэлея инерционный интервал.

Максимальной величиной обладают флуктуации компоненты скорости, направленной вдоль оси  $x$ , совпадающей с направлением средней циркуляции (Рисунок 2.8 d). При этом, максимум флуктуаций  $x$ -компоненты скорости расположен вблизи восходящего потока в нижней части расчетной области. Область, где наблюдаются флуктуации, расширяется с увеличением числа Рэлея. Аналогичная область наблюдается и в распределении флуктуаций плавучести (Рисунок 2.8 g). На Рисунке 2.8 d видна область флуктуаций  $x$ -компоненты скорости на высоте середины расчетной области внутри зоны рециркуляции, что связано с развитием неустойчивостей в сдвиговом слое. Однако другие компоненты скорости (Рисунок 2.8 e,f) не имеют максимума флуктуаций в этом месте, что говорит об анизотропии течения. Увеличение числа Рэлея приводит к расширению зон,

где наблюдаются флуктуации скорости и снижению их величины, что связано с переходом энергии когерентных структур в стохастическую составляющую и ее диссипацией в тепло.

Рисунок 2.9 показывает, что при увеличении числа Рэлея происходит расширение как пространственных так и временных спектров в высокочастотную область. При этом, для максимального рассматриваемого числа Рэлея инерционный интервал уже достаточно хорошо заметен, что говорит о возрастающей роли вторичных неустойчивостей в потоке, которые обычно ассоциируются с турбулентностью. Ни один из рассматриваемых режимов нельзя считать режимом с полностью развитой турбулентностью из-за недостаточных чисел Рейнольдса. Тем не менее, для режима с максимальным числом Рэлея можно ожидать заметного проявления эффектов турбулентности. Для полноты исследования необходимо провести расчеты с большими числами Рэлея, что не было сделано из-за ограниченности вычислительных ресурсов.

### 2.2.1. Обработка результатов методом SPOD

Для анализа когерентных мод в потоке использовался метод Spectral Proper Orthogonal Decomposition (SPOD) [74], этот метод имеет ряд преимуществ по сравнению классическим POD, потому что он учитывает временную когерентность сигналов, и в то же время, он не настолько строго выделяет фиксированные частоты в потоке, как Dynamic Mode Decomposition (DMD). Это дает возможность выделять процессы в близком частотном диапазоне как одну моду, что для нелинейных явлений часто бывает более обосновано, чем использование фиксированных частот.

Для построения мод с помощью SPOD метода для каких-либо пространственных полей (скорость, температура и другие) сначала выполняется разложение на среднее по времени поле и флуктуации. Флуктуации представляются в виде линейной комбинации пространственных мод с некоторыми коэффициентами, зависящими от времени. Мгновенные поля представляются последовательно с фиксированным шагом по времени между ними, из них вычитается среднее поле, происходит нормировка, затем строится свертка всех возможных пар мгновенных полей между собой. Результатом свертки является число, определяющее степень корреляции двух моментов времени между собой. Результаты свертки записываются в матрицу с размерностью  $N \times N$ , где  $N$  это число рассмотренных моментов времени. В классическом POD методе далее происходит ортогонализация данной матрицы, с вычислением собственных чисел и собственных векторов. Затем собственные вектора данной матрицы упорядочиваются по энергии таким образом, что первые несколько мод содержат основную часть энергии потока. Временная эволюция данных мод

представляют собой низкоразмерную модель потока и позволяет отследить закономерности в его динамике.

Отличие SPOD от POD заключается в том, что перед ортогонализацией матрицы происходит процедура низкочастотной фильтрации коэффициентов матрицы, то есть, осреднение корреляционных коэффициентов по временным соседям. Таким образом, получают больший вес те моды, которые проявлены с приблизительно равными коэффициентами в близкие моменты времени, и исключаются резкие, непериодические «выплески» по времени. Таким образом, предпочтение в разложении отдается квазипериодическим, когерентным процессам, что делает этот метод удобным для нахождения устойчивых колебаний в потоке.

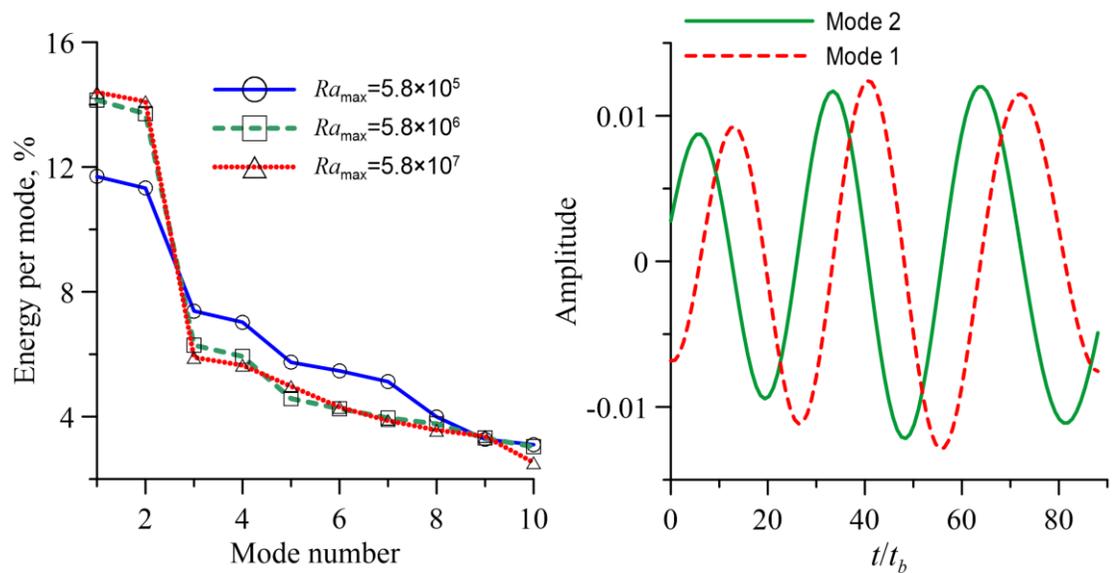


Рисунок 2.10 - SPOD спектр (слева) и временная эволюция первых двух мод для  $Ra = 5.8 \times 10^6$  (справа)

SPOD-спектр и временная эволюция первых двух мод (Рисунок 2.10) показывают присутствие в потоке колебательного процесса на фиксированной частоте, близкой к определенной по пикам временного спектра турбулентных пульсаций. Из спектра SPOD (Рисунок 2.10 слева) видно, что первые две моды, отвечающие за рассматриваемый процесс колебаний, содержат в себе до 30% турбулентной энергии потока, и эта доля не уменьшается с ростом числа Рэлея.

Используемый решатель для SPOD разложения был реализован на языке Python. Разложение проводилось по трехмерным полям скорости, полученным с интервалом  $0.35 t_b$  за время  $88 t_b$ . Выбор данных параметров связан с техническими ограничениями на располагаемый объем памяти для хранения наборов трехмерных полей течения.

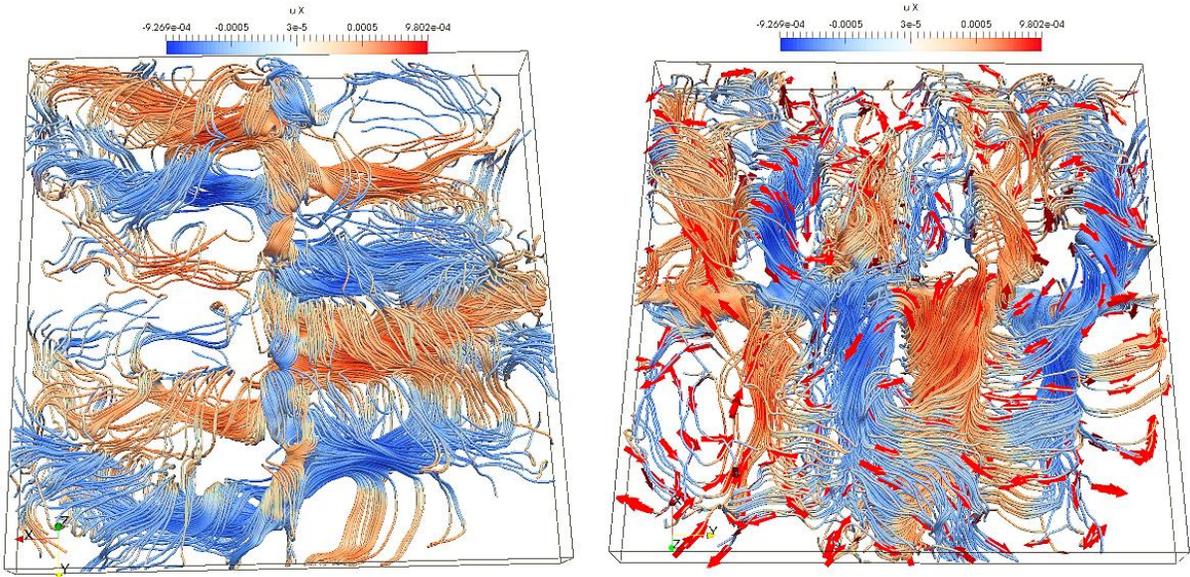


Рисунок 2.11 - Линии тока для первой SPOD моды (2 ракурса). Цветом обозначен знак и величина поперечной скорости

Первые SPOD моды показывают схему движения потока во время колебаний (Рисунок 2.11). В линиях тока, построенных по первой моде, видна пространственная периодичность течения и пространственный сдвиг конвективных валов на половину периода по разные стороны от центрального восходящего потока. Видно, что в процессе движения жидкость приобретает право- и левовинтовую спиральность, и области с разной спиральностью чередуются между собой. При прохождении через середину потока конвективный вал сдвигается на половину периода и продолжает движение от центра уже на другой половине области.

### 2.2.2. Асимптотическая оценка периода колебаний

Приведем некоторые соображения для асимптотической оценки периода колебаний в зависимости от кинематической вязкости  $\nu$  при фиксированных остальных параметрах течения. Будем считать, что структура пограничного слоя рассматриваемого течения аналогична структуре свободно-конвективного течения. Из наблюдений за свободно-конвективными течениями известна зависимость сдвигового напряжения на стенке от числа Релея [96] как  $\tau_w \sim Ra^{0.66}$ . Это можно интерпретировать как независимость скорости трения от расстояния между стенками, которую можно записать через безразмерные параметры течения как:

$$Re_\tau \sim \sqrt[3]{Ra} \quad \rightarrow \quad \frac{u_\tau L_z}{\nu} \sim \sqrt[3]{\frac{\Delta b_{max} L_z^3}{\nu^2}} \quad (2.7)$$

Откуда можно получить аппроксимацию для градиента горизонтальной скорости на стенке:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{wall} \sim \nu^{-1/3} (\Delta b_{max})^{2/3} \quad (2.8)$$

Градиент от скорости на стенке в плоскопараллельном течении равен значению завихренности на стенке ( $\omega_0$ ), а максимальная скорость в потоке равна интегралу от завихренности в вертикальном направлении от стенки до точки, где завихренность переходит через ноль.

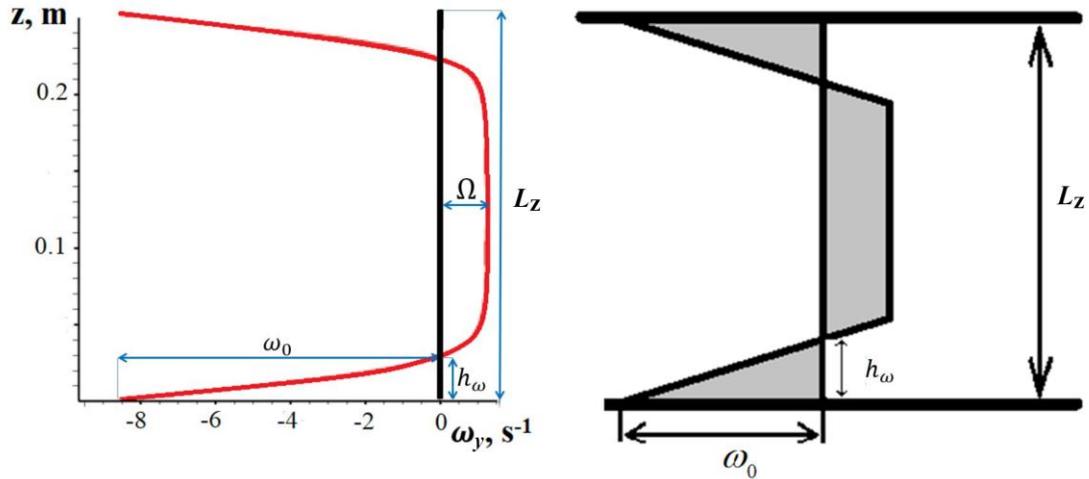


Рисунок 2.12 - Вертикальный профиль у-компоненты средней завихренности в точке  $x = 0.6 L_x$  для  $Ra = 5.8 \times 10^6$  (слева). Упрощенное представление поля средней завихренности (справа)

Упрощенная структура поля у-компоненты средней завихренности представлена на Рисунке 2.12. Можно разделить вертикальный профиль завихренности на три участка: два пристенных участка, до перехода завихренности через ноль, и центральный участок с положительной завихренностью (Рисунок 2.12, справа). Пристенные участки будем представлять линейными функциями. Тогда на профиле можно выделить прямоугольный треугольник с катетами  $h_\omega$  и  $\omega_0$ , площадь которого будет равна максимальной горизонтальной скорости на профиле ( $U_{max}$ ). Откуда, можно найти высоту треугольника  $h_\omega$ :

$$h_\omega = \frac{2U_{max}}{\omega_0} \quad (2.9)$$

Из-за того, что полная циркуляция по всей области должна быть равна нулю, площадь под положительным участком вертикального профиля завихренности должна быть равна площади под отрицательным участком. Аппроксимируя положительный участок профиля прямоугольником, получаем для завихренности в центре соотношение:

$$\Omega = \frac{2U_{max}}{L_z - 2h_\omega} \quad (2.10)$$

Считая частоту колебаний пропорциональной завихренности в ядре потока, можно записать выражение для периода колебаний:

$$T \sim \frac{L_z - 2h_\omega}{2U_{max}} = \frac{L_z}{2U_{max}} - \frac{2}{\omega_0} \quad (2.11)$$

Согласно распределению средней скорости (Рисунок 8а), будем считать  $U_{max} = 0.12 \text{ м/с} = 0.54 \text{ wh}$ .

Тогда, аппроксимируя расчетные данные, получим следующее приближенное выражение для  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = 0.2 \nu^{-1/3} (\Delta b_{max})^{2/3} \quad (2.12)$$

Для периода колебаний, после совмещения с результатами расчетов, получается следующее приближенное выражение:

$$T \approx 22 \left( \frac{L_z}{2U_{max}} - \frac{2}{\omega_0} \right) = 22 \left( \frac{L_z}{2U_{max}} - \sqrt[3]{\frac{10 \nu}{\Delta b_{max}^2}} \right) \quad (2.13)$$

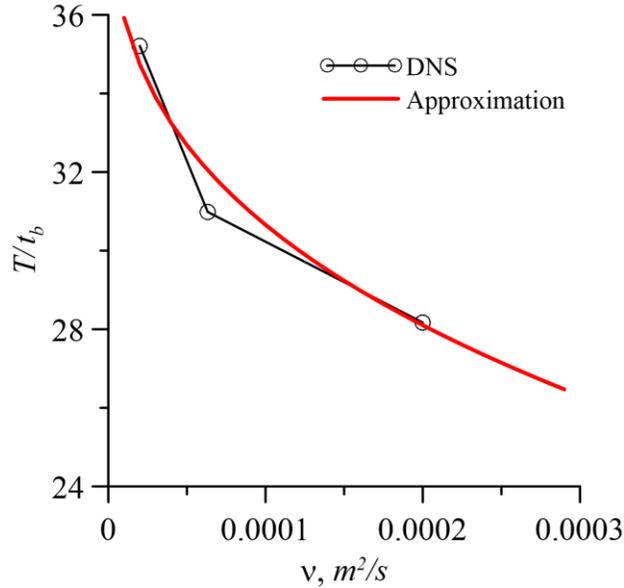


Рисунок 2.13 - Сравнение периода колебаний, полученного в расчетах, с аппроксимацией по формуле (2.13) для различных значений кинематической вязкости

Сравнение периода колебаний, полученного по формуле (2.13) с DNS-расчетами приведено на Рисунке 2.13. Видно, что аппроксимация достаточно неплохо предсказывает тренд в изменении периода колебаний в зависимости от кинематической вязкости. При увеличении числа Рэлея отношение  $h_\omega/L_z$  будет стремиться к 0, что дает асимптотическую формулу для периода колебаний в этом случае:

$$T_{max} \approx 22 \frac{L_z}{2U_{max}} \quad (2.14)$$

Заметим, что неопределенной остается зависимость величины  $U_{\max}$  от геометрических параметров течения, а также от соотношения между величинами горизонтального и вертикального градиентов плавучести. Вероятно, она должна масштабироваться подобно некоторой комбинации  $w_b = \sqrt{\Delta b_{\text{mean}} L_z}$  и  $w_h = \sqrt{\Delta b / \Delta x \cdot L_z^2}$ , однако детальное исследование этого вопроса требует проведения большого количества дополнительных расчетов. Также неосвещенным остался вопрос зависимости периода и амплитуды колебаний от числа Прандтля, что может быть направлением для дальнейших исследований.

### 2.3. Результаты двумерных расчетов.

Горизонтальный градиент плавучести на нижней стенке приводит к генерации горизонтальной завихренности вблизи поверхности по бароклинному механизму и формированию циркуляции по аналогии с классической циркуляцией Гадлея [28]. Вертикальный градиент плавучести между верхней и нижней стенкой приводит к формированию системы конвективных ячеек Бенара различной интенсивности в зависимости от разницы температур между стенками. В присутствии обоих этих градиентов течение должно проявлять и те и другие свойства в разной степени.

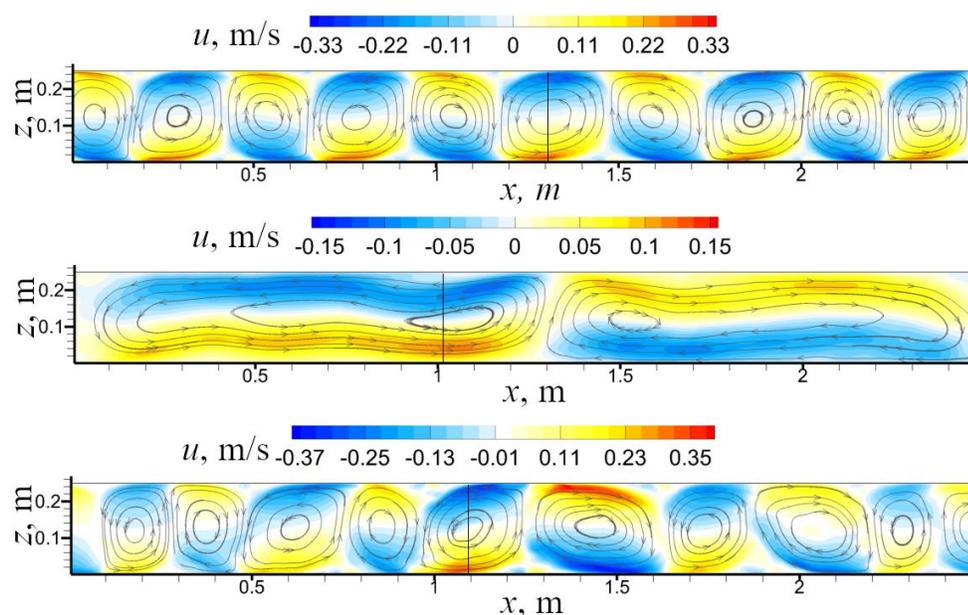


Рисунок 2.14 - Поля  $x$ -компоненты скорости, полученные в двумерных расчетах для случаев 4.1 – 4.3 согласно Таблице 2.4 (сверху вниз). Цветом показана величина горизонтальной компоненты скорости

Для выяснения природы описываемого явления низкочастотных колебаний, помимо трехмерных расчетов, была проведена серия двумерных расчетов методом прямого численного моделирования (Рисунок 2.14). Наличие или отсутствие низкочастотных колебаний в двумерном режиме течения дало бы возможность понять причину их возникновения. Для двумерных расчетов разрешалась описанная выше система уравнений в двумерной постановке с использованием того же открытого программного кода MicroНН 1.0, но с другими граничными условиями на поле плавучести  $b$ . Детали двумерных расчетов представлены в Таблице 2.4.

Таблица 2.4 - Параметры 2D DNS-расчетов

№	$L_x \times L_z$	$N_x \times N_z$	$\nu$	$b_{upperBound}$	$b_{lowerBound}$
4.1	2.5×0.25	360×128	$2 \times 10^{-4}$	$b = -0.5$	$b = 1$
4.2	2.5×0.25	360×128	$2 \times 10^{-4}$	$b_s(x)$ из уравнения (2.4)	$b_s(x)$ из уравнения (2.4)
4.3	2.5×0.25	360×128	$2 \times 10^{-4}$	$b = -0.5$	$b_s(x)$ из уравнения (2.4)

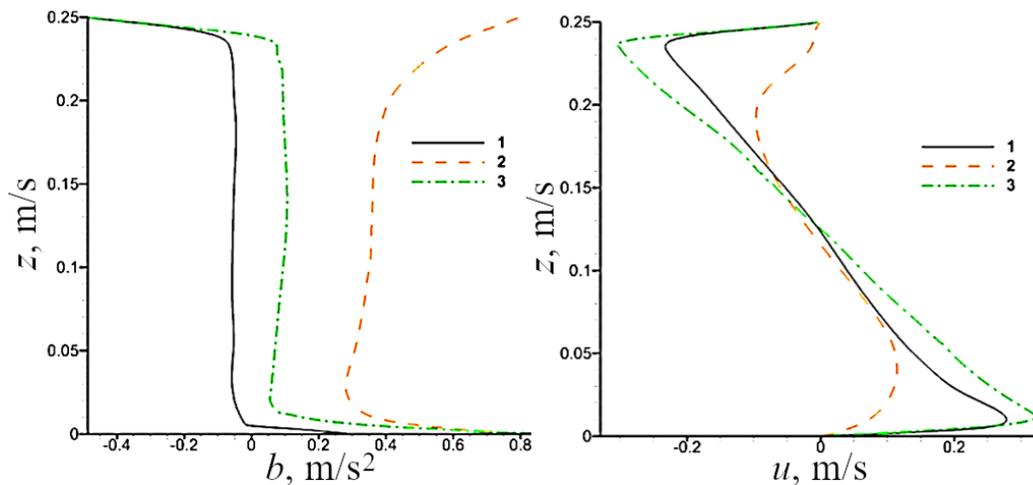


Рисунок 2.15 - Вертикальные профили поля плавучести  $b$  (слева) и горизонтальной компоненты скорости (справа) в сечениях, проведенных через центр циркуляций (вертикальные линии на Рисунке 2.14) для случаев 4.1 – 4.3 (Таблица 2.4)

На Рисунках 2.14 и 2.15 представлены результаты расчетов в двумерной постановке. В случае 4.1, при постоянной разнице плавучести  $b$  между верхней и нижней стенками, наблюдались классические ячейки Бенара с поперечным масштабом порядка  $L_z$ , при этом модуль мгновенной скорости доходил до значений  $u_{max} = 0.35$  м/с, что близко к скорости «свободного падения»  $w_b = \sqrt{\Delta b_{mean} L_z} = 0.44$  м/с. В данном случае низкочастотные колебания отсутствовали. В случае 4.2 (при наличии только горизонтального градиента плавучести) наблюдалось формирование двух

горизонтальных циркуляций по обеим сторонам от центрального пика температуры. При этом, в результате взаимодействия этих циркуляций между собой, возникали небольшие флуктуации в положении восходящего потока, однако эти флуктуации были стохастическими, без единой выделенной частоты. Модуль скорости доходил до значений порядка 0.16 м/с, что согласуется с теорией Гадлея [40]. Введенная скорость «свободного падения» через средний перепад плавучести  $b$  вдоль горизонтальной оси  $w_h = \sqrt{\Delta b / \Delta x \cdot L_z^2} \approx 0.22$  м/с близка к наблюдаемому значению скорости для случая 4.2.

Скорости, наблюдаемые в случае 4.1 значительно превышали скорости для случая 4.2, что говорит о том, что эффект воздействия вертикального градиента плавучести на поток будет превосходить в рассмотренных конфигурациях эффект от горизонтальной циркуляции. Действительно, в случае 4.3 (при наличии как горизонтального, так и вертикального градиента плавучести) наблюдались аналогичные первому случаю ячейки Бенара, но с разной интенсивностью в различных точках расчетной области. Центральная пара ячеек была фиксирована в положении максимума температуры на нижней границе, и имела несколько больший горизонтальный масштаб по сравнению с остальными, однако существенных колебаний положений ячеек или их интенсивности не наблюдалось. Таким образом видно, что эффект низкочастотных когерентных колебаний не наблюдается в двумерной постановке и является существенно трехмерным эффектом.

#### **2.4. Результаты трехмерных расчетов при различных значениях горизонтального градиента температуры на стенках.**

Для определения зависимости характеристик низкочастотных колебаний от соотношения между вертикальным и горизонтальным температурными градиентами была проведена серия расчетов 3.1 – 3.6 (Таблица 2.3) при фиксированном вертикальном перепаде  $\Delta b_z = 1$  м/с<sup>2</sup> и при меняющейся амплитуде  $\Delta b_x$  Гауссова распределения на стенках от 0 до 3 м/с<sup>2</sup> согласно формулам (2.5) и (2.6). На Рисунке 2.2 представлена схема расчетной области, используемой в данной серии расчетов.

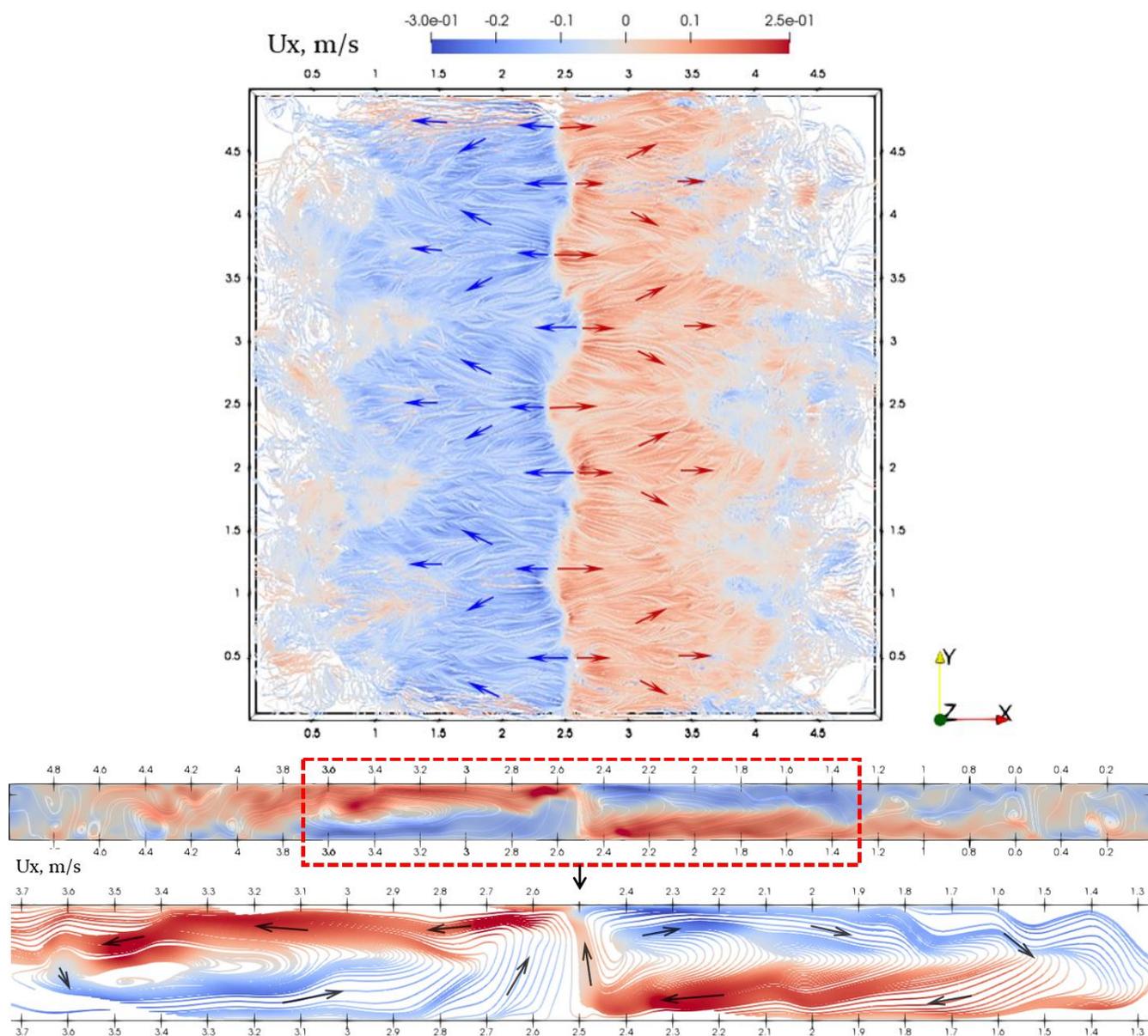


Рисунок 2.16 - Линии тока в горизонтальном (сверху) и вертикальном (снизу) сечениях для  $\Delta b_x = 2$  м/с<sup>2</sup>,  $\Delta b_z = 1$  м/с<sup>2</sup>. Цветом показана x-компонента скорости

На Рисунке 2.16 представлены линии тока в горизонтальном и вертикальном сечениях, чтобы показать мгновенную структуру течения. Видно, что циркуляционные течения занимают центральную часть области в направлении  $x$ . За пределами этой области циркуляций картина течения не имеет выделенного среднего направления и показывают наличие структур, напоминающих ячейки Бенара. Также по линиям тока в вертикальном сечении можно заметить, что циркуляционные структуры по обе стороны от центра способны перезамкаться между собой, осуществляя перенос вещества из одной части в другую.

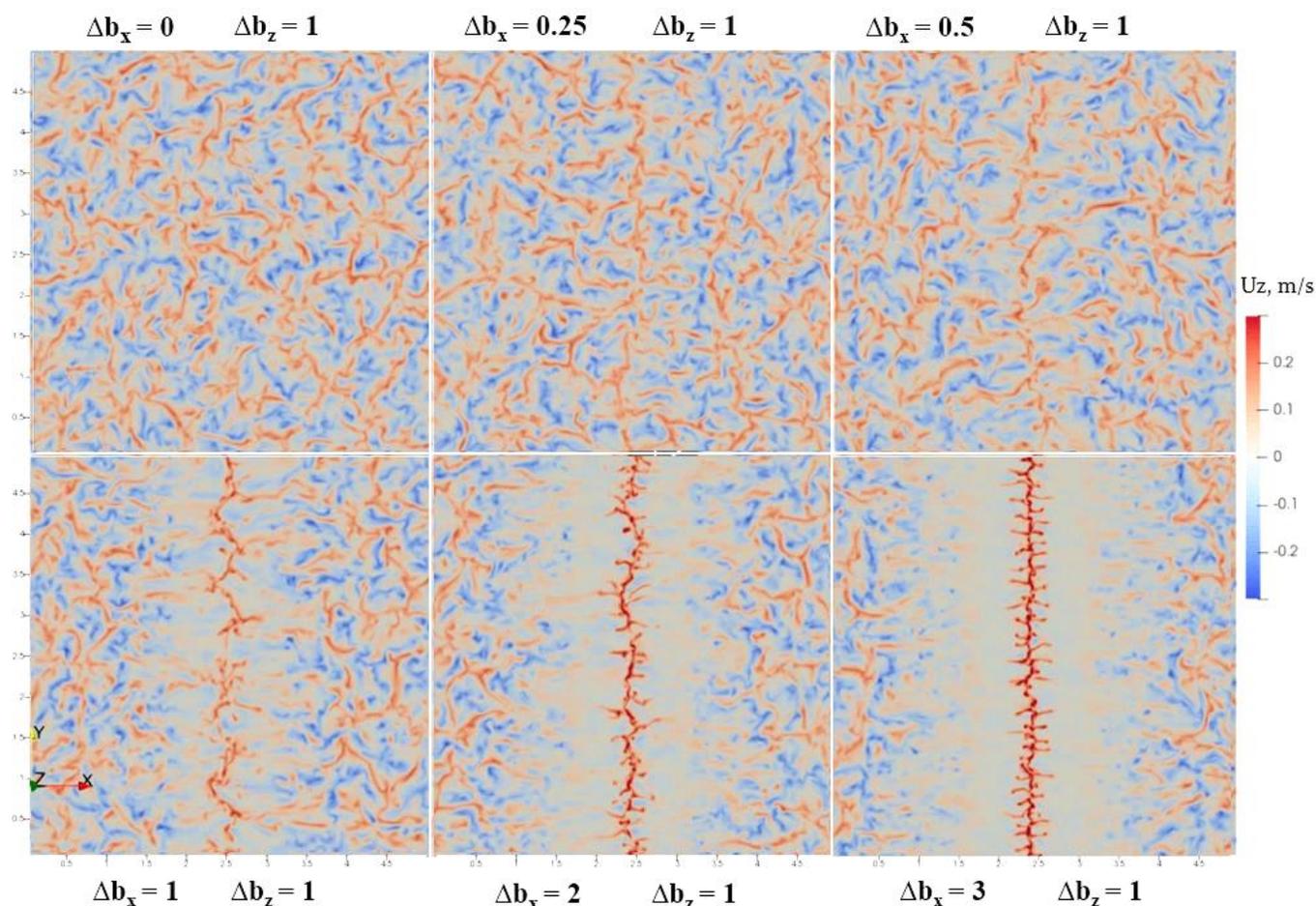


Рисунок 2.17 - Мгновенные распределения z-компоненты скорости в горизонтальном сечении  $z = 1.25$  м для различных отношений  $\Delta b_x / \Delta b_z$

На Рисунке 2.17 представлены мгновенные распределения z-компоненты скорости в горизонтальном сечении для различных значений  $\Delta b_x$  и  $\Delta b_z$  согласно Таблице 2.3. При  $\Delta b_x = 0$  горизонтальный градиент отсутствует и течение представляет собой классическое течение Рэля – Бенара. При увеличении амплитуды горизонтального градиента  $\Delta b_x$  начинает проявляться выделенная структура в центре области. Под действием горизонтального градиента ячейки с обеих сторон от центра оказываются под воздействием потоков, направленных к центру области, и, стягиваясь к центру, формируют горизонтальные конвективные валы, которые начинают взаимодействовать между собой при достижении области центрального восходящего потока. При значении  $\Delta b_x = 1 \text{ м/с}^2$  становится видна пространственная периодичность в структуре конвективных валов вблизи центрального восходящего потока. Эта же периодичность, но по времени, наблюдается в «пилообразных» отклонениях положения восходящего потока от центральной линии расчетной области. При этом пространственный масштаб периодичности близок к масштабу конвективных ячеек, наблюдаемых на периферии потока.

При увеличении  $\Delta b_x$  до значений  $\Delta b_x = 3 \text{ м/с}^2$  пространственный масштаб конвективных структур вблизи восходящего потока уменьшается, при этом, их движение становится более хаотическим. Из этих результатов можно сделать предположение, что данный эффект формирования устойчивых колебаний проявляется только при некотором определённом соотношении между вертикальным и горизонтальным градиентами температуры.

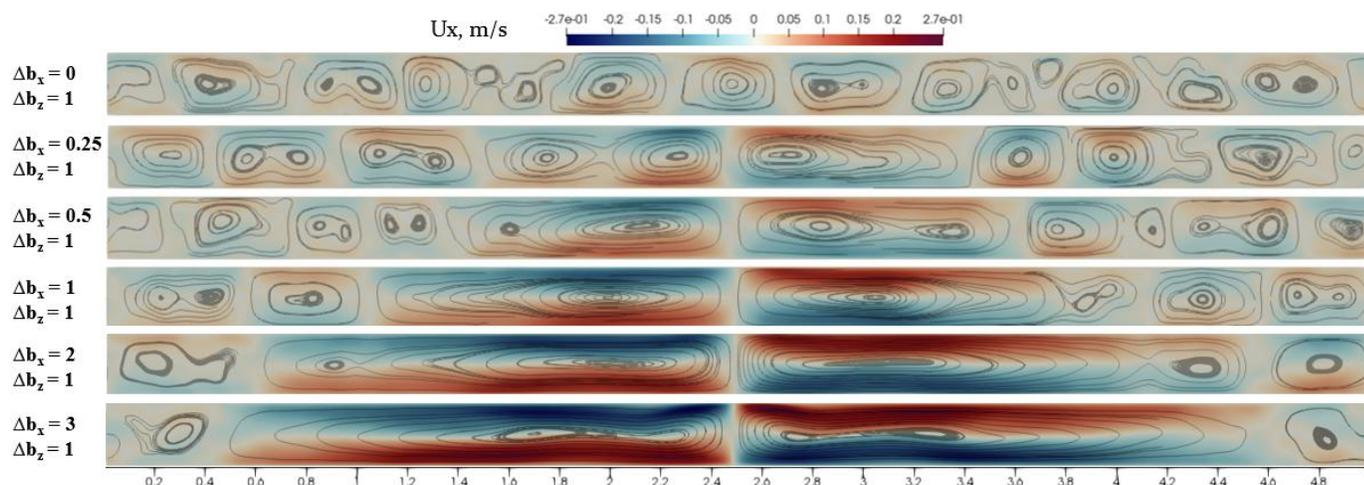


Рисунок 2.18 - Осредненные по времени распределения x-компоненты скорости и линии тока в вертикальном сечении  $y = 2.5 \text{ м}$  для различных отношений  $\Delta b_x / \Delta b_z$

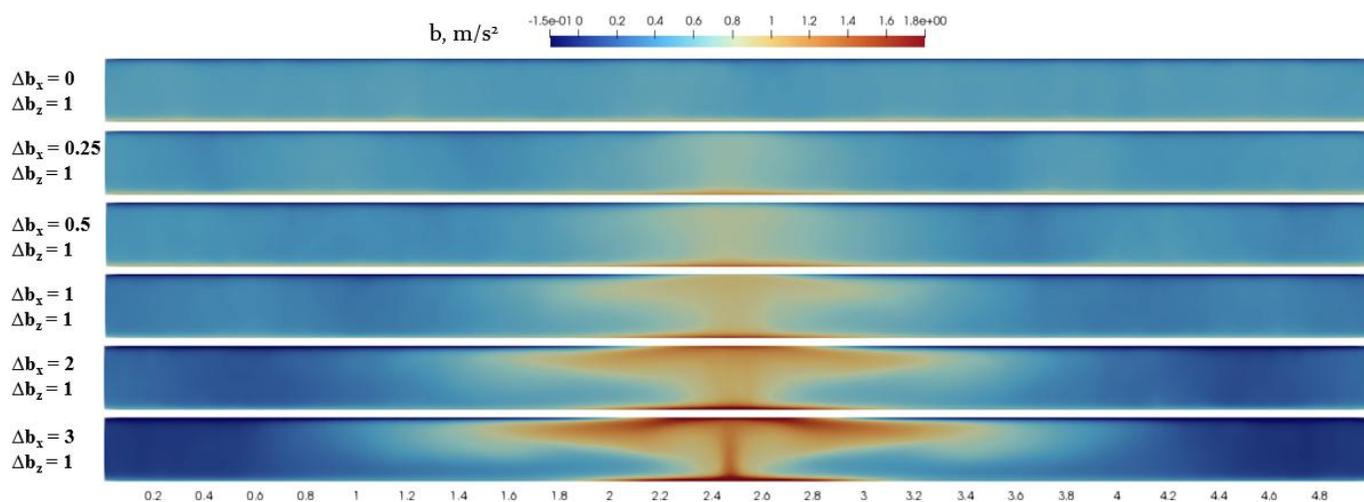


Рисунок 2.19 - Осредненные по времени распределения плавучести в вертикальном сечении  $y = 2.5 \text{ м}$  для различных отношений  $\Delta b_x / \Delta b_z$

Средние характеристики потока для различных соотношений между вертикальным и горизонтальным градиентами плавучести приведены на рисунках 2.18–2.21. На Рисунке 2.18 представлены осредненные по времени распределения x-компоненты скорости в вертикальном сечении  $y = 2.5 \text{ м}$ . Видно, что при увеличении амплитуды горизонтального градиента  $\Delta b_x$  в центре области симметрично начинают формироваться горизонтальные циркуляции, размер которых

увеличивается с ростом горизонтального градиента. Также одновременно с этим происходит увеличение скорости движения на горизонтальных участках данных циркуляций.

На Рисунке 2.19 представлены осредненные по времени распределения плавучести в вертикальном сечении  $y = 2.5$  м. Видно, что развитые циркуляционные течения при  $\Delta b_x$ , начиная с  $1 \text{ м/с}^2$ , приводят к формированию температурной инверсии по всей ширине зоны рециркуляции. Такое поведение связано с тем, что при достаточно большой скорости циркуляционного течения, скорость диффузии тепла в вертикальном направлении становится существенно меньше скорости распространения тепла вдоль линий тока образующихся циркуляции, что приводит к образованию положительного градиента температуры на некотором удалении от восходящего потока.

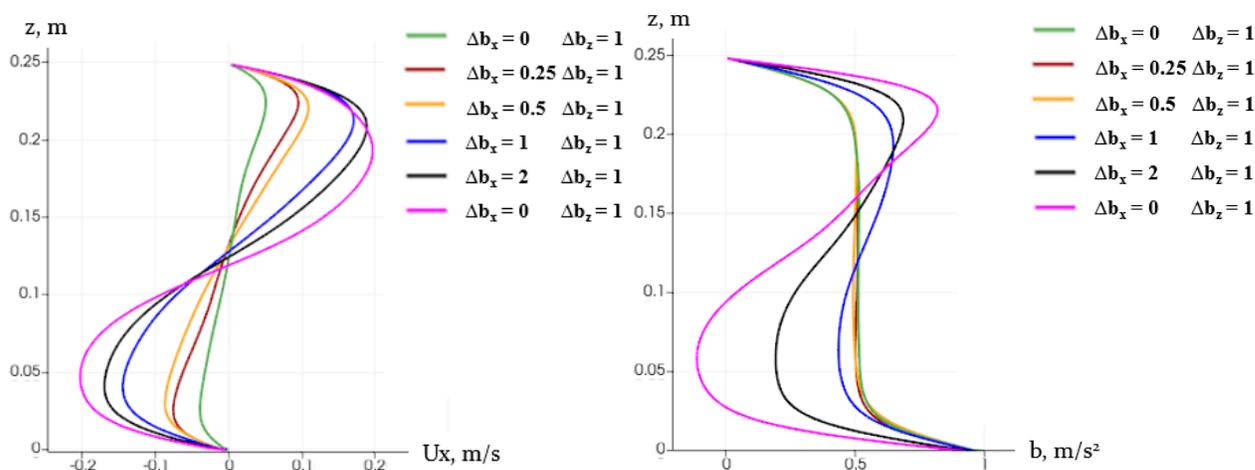


Рисунок 2.20 - Вертикальные профили осредненных по времени распределений  $x$ -компоненты скорости (слева) и плавучести (справа) при  $x = 2.3$  м  $y = 2.5$  м для различных отношений  $\Delta b_x / \Delta b_z$ .

На Рисунке 2.20 представлены вертикальные профили осредненных по времени распределений  $x$ -компоненты скорости и плавучести при  $x = 2.3$  м  $y = 2.5$  м, соответствующие распределениям, представленным на Рисунках 2.18 и 2.19. По профилям скорости можно заметить, что при увеличении амплитуды горизонтального градиента максимальное значение скорости циркуляции растёт нелинейно. Профиль плавучести имеет асимметричную форму относительно центра в вертикальном направлении в отличие от профилей скорости, что связано с асимметрией в накоплении и потере тепла в потоке при движении вдоль верхней и нижней стенок. Также, по форме профиля плавучести можно найти частоту Бранта–Вяйсяля, с которой элемент жидкости, перемещённый вертикально в стратифицированной среде, будет осциллировать. Для текущих значений инверсии значения частоты Бранта–Вяйсяля  $N = \sqrt{db/dz}$  равнялись 1.5 - 2.2 Гц. Наблюдаемые в потоке колебания имеют частоту  $f_{osc} \sim 0.1$  Гц, следовательно можно сделать вывод, что напрямую колебательные эффекты за счет присутствия слоя инверсии (внутренние волны) не

являются причиной возникновения тех колебательных процессов, которые мы наблюдаем в горизонтальной плоскости.

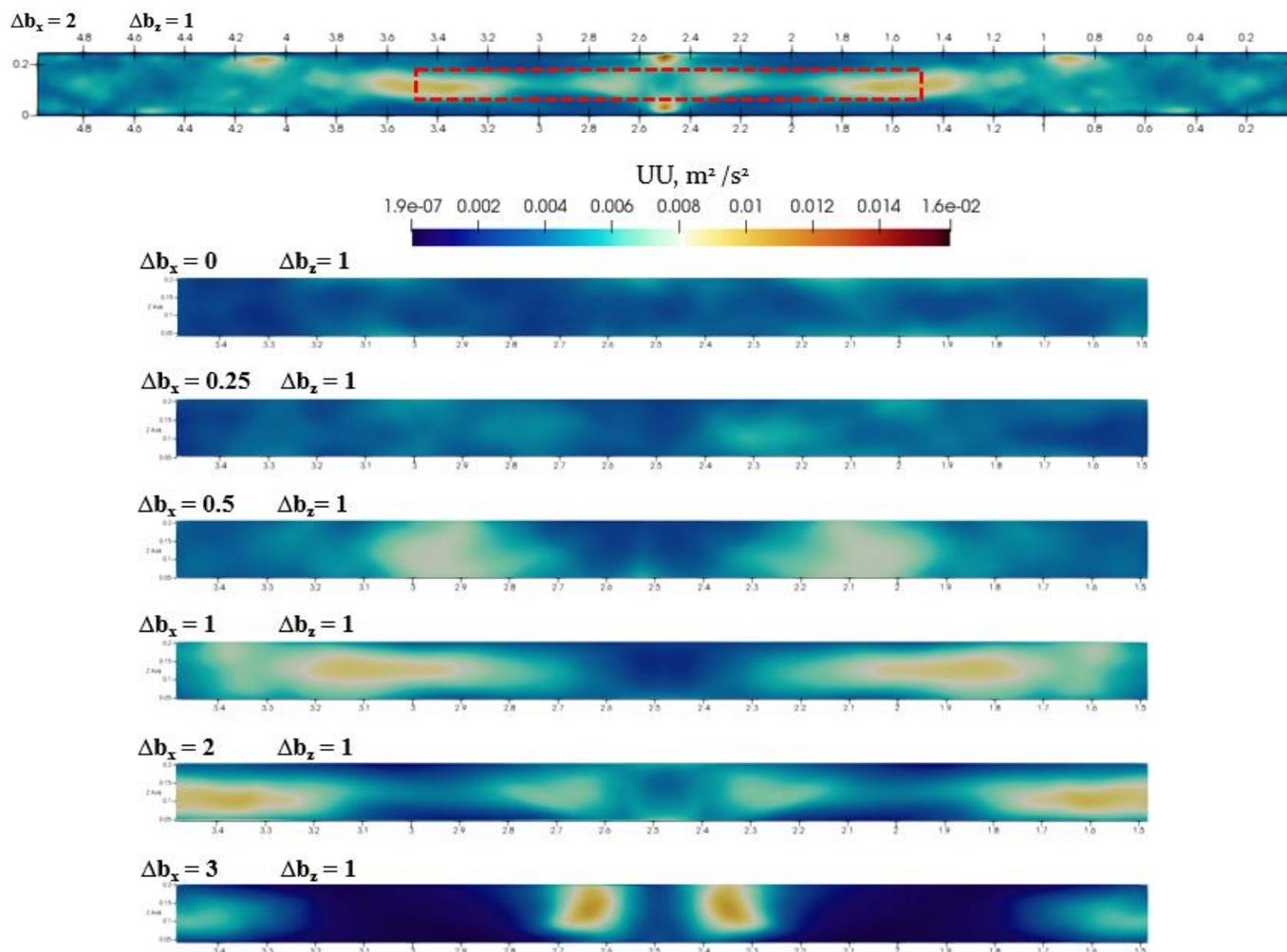


Рисунок 2.21 - Осредненные по времени распределения вторых моментов пульсаций x-компоненты скорости в вертикальном сечении  $y = 2.5$  м для различных отношений  $\Delta b_x / \Delta b_z$

На Рисунке 2.21 представлены осредненные по времени распределения вторых моментов пульсаций x-компоненты скорости в вертикальном сечении. В рассмотрение взяты только те области, в которых непосредственно проявляются колебания потока, чтобы убрать из рассмотрения пульсации скорости вблизи верхней и нижней границ, где доминируют пристенные эффекты. Видно, что начиная со значения  $\Delta b_x$  равного  $0.5 \text{ м/с}^2$ , начинают проявляться области повышенных пульсации скорости в симметричных относительно центра областях, и с дальнейшим увеличением горизонтального градиента данные области начинают расходиться от центра и увеличиваться в размере и интенсивности. Однако при значении  $\Delta b_x$  равного  $3 \text{ м/с}^2$  появляется выраженный максимум пульсаций вблизи восходящего потока, за пределами которого находится обширная область, где пульсации практически равны 0.

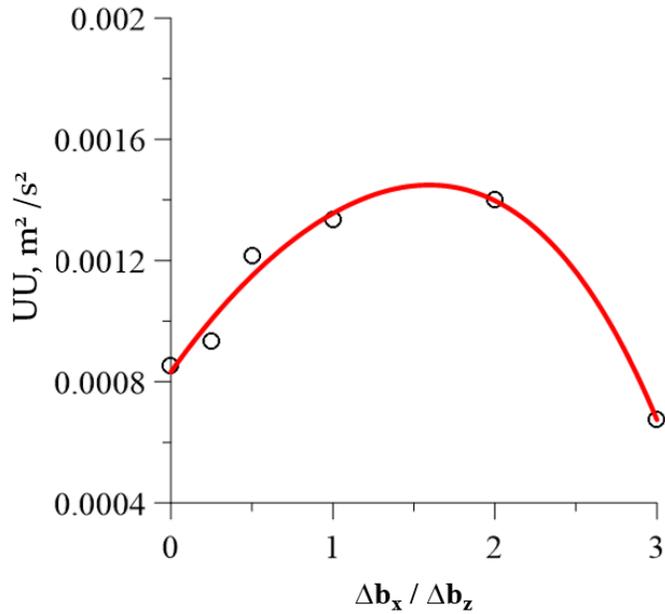
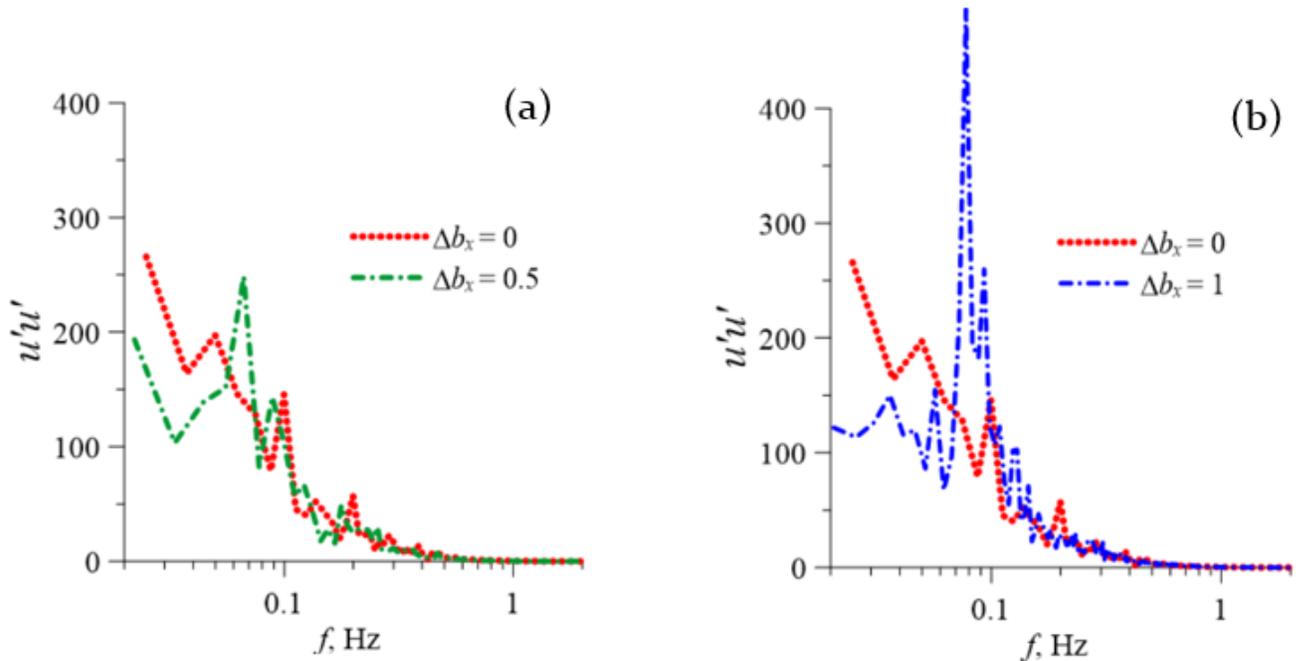


Рисунок 2.22 - График зависимости осредненных по объему вторых моментов пульсаций x-компоненты скорости от отношения  $\Delta b_x / \Delta b_z$

На Рисунке 2.22 представлен график зависимости осредненных по объему вторых моментов пульсаций x-компоненты скорости от отношения  $\Delta b_x / \Delta b_z$ . На графике присутствует максимум, что говорит о возможных резонансных эффектах, проявляющихся при определенном соотношении между интенсивностями вертикальных и горизонтальных тепловых потоков.



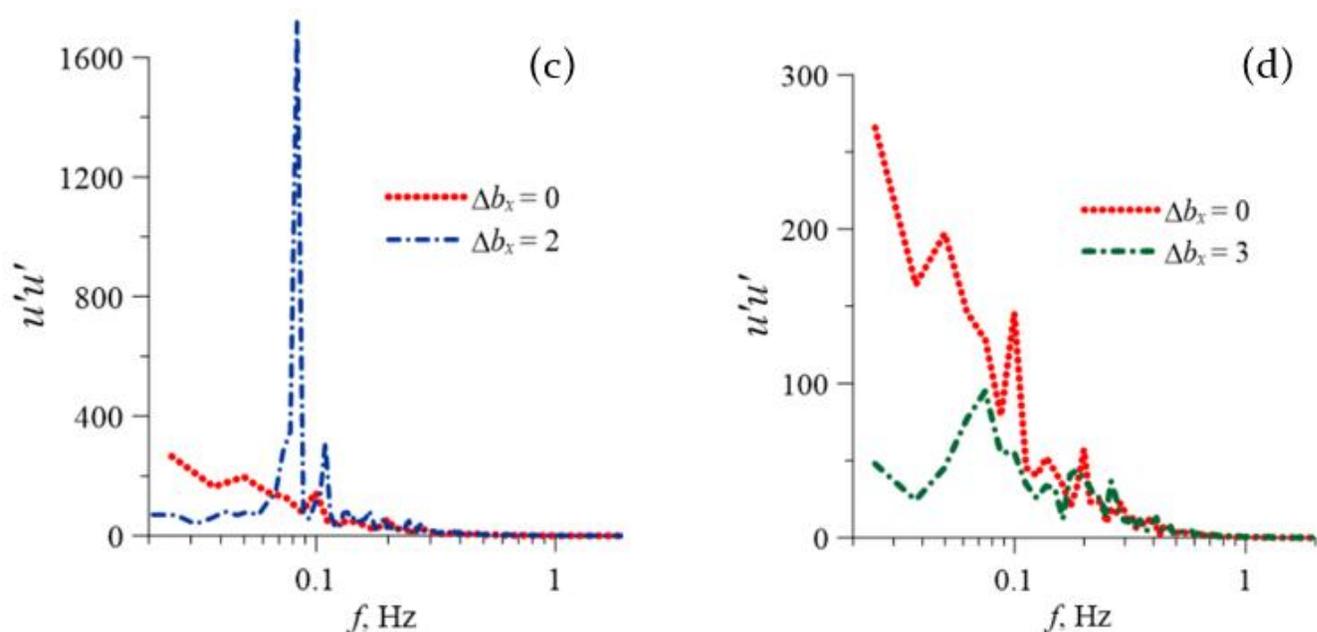
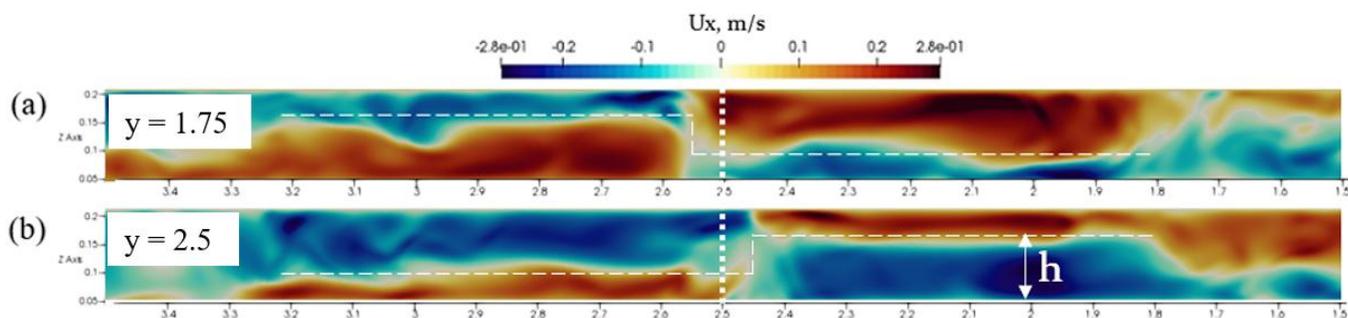


Рисунок 2.23 - Временные спектры продольных пульсаций скорости в центре зоны рециркуляции для различных величин горизонтального градиента плавучести  $\Delta b_x$  от 0 до 3 м/с<sup>2</sup> (при фиксированном вертикальном перепаде  $\Delta b_z = 1$  м/с<sup>2</sup>)

На Рисунке 2.23 представлены временные спектры продольных пульсаций скорости в центре зоны рециркуляции для различных величин горизонтального градиента плавучести. Красная линия показывает спектр пульсаций без добавления горизонтального градиента плавучести (течение Рэля – Бенара). Видно, что с увеличением горизонтального градиента плавучести в спектрах растет пик на частоте  $\sim 0.08$  Гц. При сильном увеличении горизонтального градиента плавучести ( $\Delta b_x = 3$  м/с<sup>2</sup>) пульсации начинают подавляться. Таким образом, существует диапазон соотношений вертикального и горизонтального потоков тепла, при которых эффект максимален.



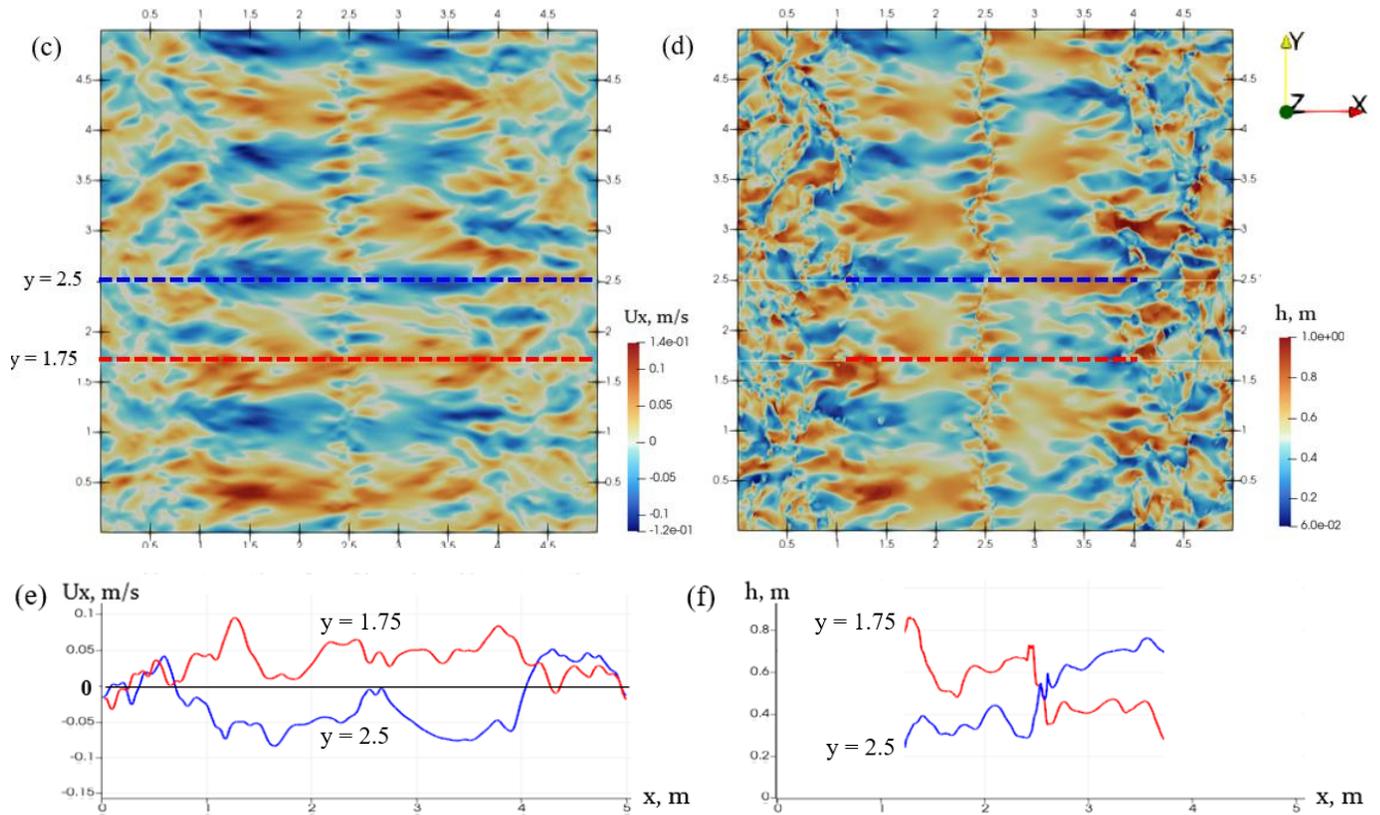


Рисунок 2.24 - Мгновенные распределения  $x$ -компоненты скорости в вертикальных сечениях  $y = 1.75$  м (а) и  $y = 2.5$  м (б). Мгновенные распределения осредненной по высоте  $x$ -компоненты скорости (с) и высоты нулевой точки зоны рециркуляции (д) в горизонтальном сечении  $z = 1.25$  м (а) и  $y = 2.5$  м (б). Горизонтальные профили, соответствующие двум пунктирным линиям, осредненной по высоте  $x$ -компоненты скорости (е) и высоты нулевой точки зоны рециркуляции (ф)

Для более глубокого понимания механизма возникновения низкочастотных осцилляций потока было предложено проанализировать связь осредненной по высоте канала  $x$ -компоненты скорости (Рисунок 2.24 с,е) и высоты нулевой точки зоны рециркуляции (Рисунок 2.24 д,ф) для случая  $\Delta b_x = 2$  м/с<sup>2</sup>,  $\Delta b_z = 1$  м/с<sup>2</sup>, где эффект колебаний проявляется максимально. Из Рисунка 2.24 с,е видно, что осредненная по высоте канала  $x$ -компонента скорости в области зон рециркуляции в каждом сечении, параллельном оси  $Ox$ , имеет выделенное направление горизонтальной скорости, образуя полосообразные структуры, переходящие с одной стороны циркуляции на другую и имеющие четкую пространственную периодичность вдоль оси  $Oy$ .

В то же время, по распределению высоты нулевой точки зоны рециркуляции видно, что такое горизонтальное движение жидкости происходит из области, где высота центра рециркуляции выше середины, в область, где высота, наоборот, ниже середины, что качественно напоминает поверхностные волны в ограниченном объеме. Также этот процесс хорошо заметен на вертикальных

сечениях (Рисунок 2.24 a,b), где представлены состояния потока при максимальном отклонении от центра в обе стороны. Видно, что горизонтальное сжатие одной циркуляции сопровождается увлечением высоты нулевой точки  $h$ , в то время как в растяжение противоположной циркуляции приводит к уменьшению  $h$ .

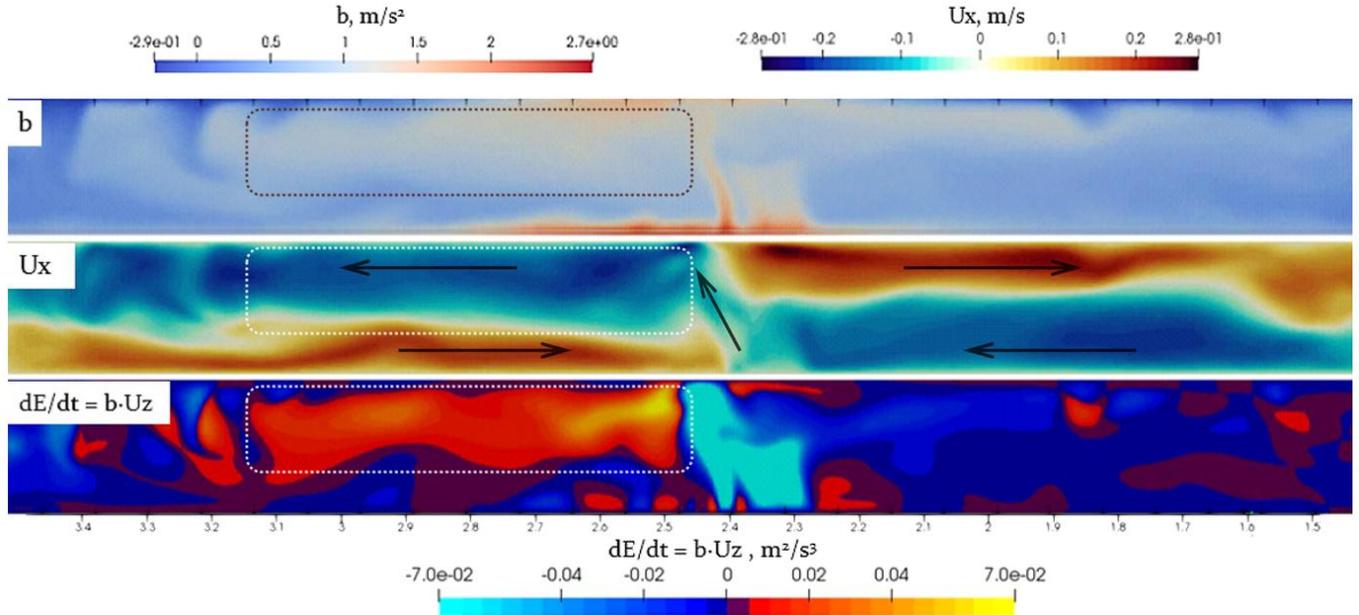


Рисунок 2.25 - Мгновенные распределения поля плавучести (сверху),  $x$ -компоненты скорости (в центре) и скорости изменения потенциальной энергии плавучести (снизу) в вертикальном сечении  $y = 2.5$  м. Векторами показаны направления скорости

Для понимания механизма колебаний было предложено исследовать скорость накопления потенциальной энергии плавучести (определяемой как  $-b \cdot z$ ) в момент максимального отклонения восходящего потока от центрального положения (Рисунок 2.25). Было обнаружено, что в фазе отклонения возникает перезамыкание противоположных циркуляций по диагонали, и как следствие перенос нагретой массы из нижних слоев одной циркуляции в верхний слой противоположной циркуляции. Такой перенос создает аномалию в распределении поля плавучести, что приводит к резкому изменению потенциальной энергии плавучести, как показано пунктиром на Рисунке 2.25 снизу. Потенциальная энергия выделяется с левой стороны, но при этом, так как в правой половине потока температура уменьшается, там происходит накопление потенциальной энергии. Такое накопление потенциальной энергии в дальнейшем реализуется в кинетической энергии возвратного движения положения центрального восходящего потока. Таким образом, механизм колебаний качественно можно сравнить с колебаниями пружины или маятника, которое сопровождается

накоплением потенциальной энергии в крайних положениях и ее переходом к кинетическую энергию движения в противоположную сторону.

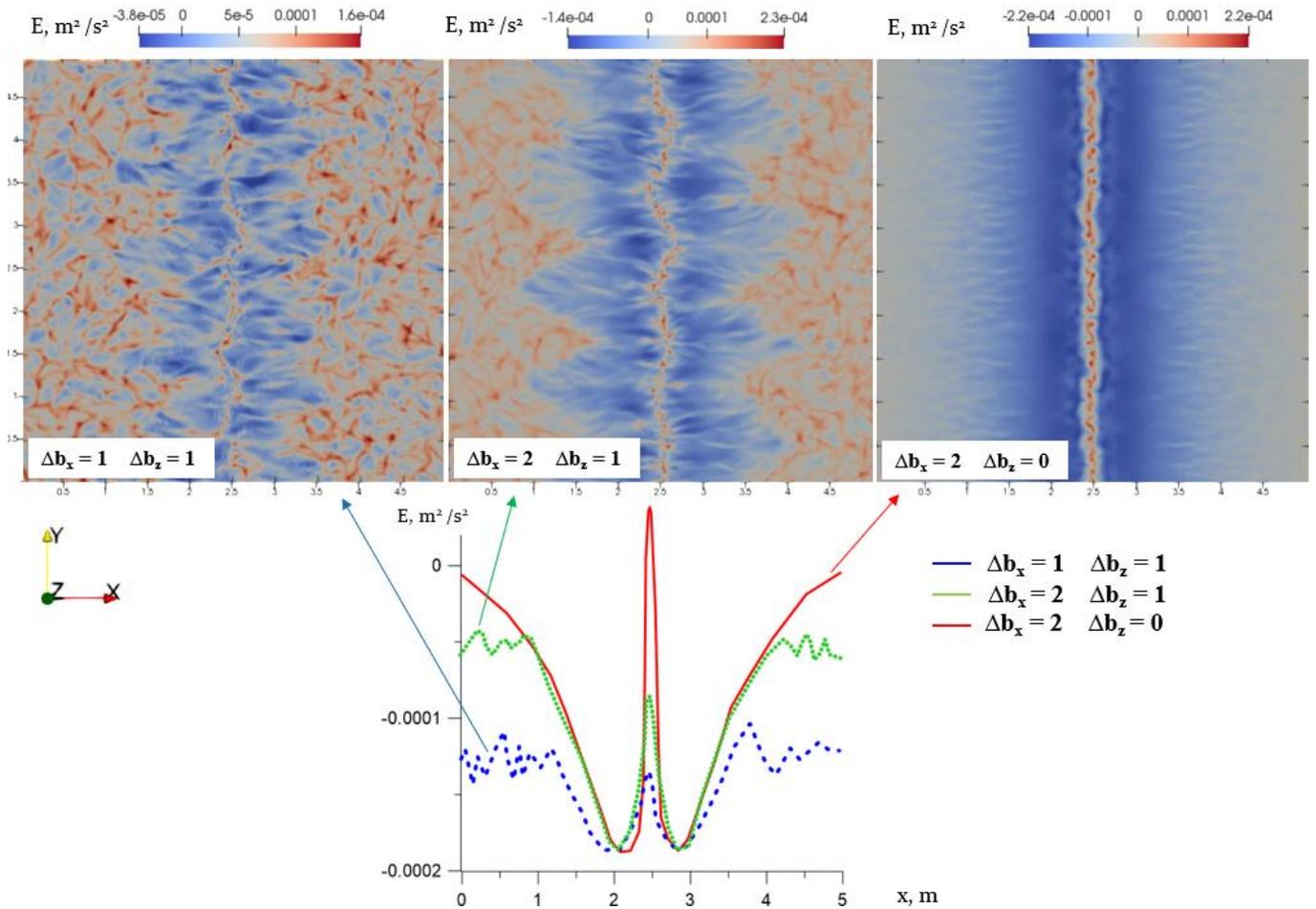


Рисунок 2.26 - Мгновенные распределения проинтегрированной по высоте потенциальной энергии плавучести для различных отношений  $\Delta b_x / \Delta b_z$  (сверху). Осредненный по направлению  $y$  профиль проинтегрированной по высоте потенциальной энергии плавучести при различных отношениях  $\Delta b_x / \Delta b_z$  (снизу)

Как было показано ранее на Рисунке 2.19, при достаточной величине горизонтального температурного градиента образуется инверсия температуры по всей ширине зоны рециркуляции. При этом часть над нулевой точкой зоны горизонтальной циркуляции имеет повышенную температуру, а часть ниже нулевой точки – пониженную. Изменение относительной высоты верхней и нижней частей зоны рециркуляции приводит к изменению потенциальной энергии потока внутри горизонтальной циркуляции. Таким образом, периодическое изменение высоты нулевой точки можно интерпретировать как обмен потенциальной энергией между левой и правой циркуляциями через перезамыкание течения над восходящим потоком, что напоминает колебание уровней жидкости в сообщающихся сосудах.

Если построить распределения проинтегрированной по высоте потенциальной энергии плавучести  $E = \int_0^h -b \cdot z \cdot dz$  (Рисунок 2.26), то становится видно, что такой тип циркуляций приводит к формированию потенциальной ямы в горизонтальном направлении, внутри которой и реализуются колебания положения восходящего потока. Также на Рисунке 2.26 заметно, что сама форма потенциальной ямы при одновременном присутствии вертикального и горизонтальных градиентов  $\Delta b_z = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $\Delta b_x = 2 \text{ м/с}^2$  аналогична форме потенциальной ямы, образующейся в течении под воздействием только горизонтального градиента  $\Delta b_z = 0$ ,  $\Delta b_x = 2$ . А при уменьшении амплитуды горизонтального градиента  $\Delta b_z = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $\Delta b_x = 1 \text{ м/с}^2$  яма становится шире. Сами по себе такие колебания должны быть затухающими за счет вязкости среды. Следовательно, существует механизм накачки этих колебаний. Можно предположить, что он связан с резонансом, когда частота колебаний положения восходящего потока близка (либо кратна) собственной частоте генерации ячеек Бенара, которые формируются за пределами зоны рециркуляции.

Из данных наблюдений и геометрических параметров потенциальной ямы для  $\Delta b_z = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $\Delta b_x = 2 \text{ м/с}^2$ , путем аппроксимации параболой, можно вычислить параметры колебаний. Из уравнения для потенциальной ямы и уравнения такой параболы  $U(x) = U_{min} + 0.5k(x - x_0)^2 = -0.0002 + 0.02(x - 2.5)^2$  можно выразить коэффициент  $k = 0.04$ . Далее, по известному из спектров значению периода  $T = 12.5$  с и выражения для периода колебаний  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$  для осциллятора  $m\ddot{x} = -kx$  можно оценить массу, участвующую в данных колебаниях  $m = 0.16$  кг. С учетом плотности среды, такая масса должна занимать объем, замкнутый в области размером  $x = 2.5 \text{ м} = 10L_z$ ,  $y = 0.5 \text{ м} = 2L_z$ ,  $z = 0.125 \text{ м} = 0.5L_z$ , что в целом достаточно хорошо согласуется с реальными характеристиками колебаний в потоке. Помимо этого, из выражения для равенства максимальных кинетической и потенциальной энергии  $mv^2/2 = kx^2/2$  и наблюдаемого значения средней по высоте горизонтальной скорости в потоке  $v = 0.1 \text{ м/с}$  можно оценить амплитуду колебаний  $x = 0.2 \text{ м}$ , что также совпадает с наблюдаемой в расчетах максимальной амплитудой отклонения положения восходящего потока от центральной линии.

## 2.5. Выводы

В данной части работы представлены результаты численного исследования влияния линейно-симметричной неоднородности в распределении температуры на горизонтальных поверхностях на образование и эволюцию крупномасштабных когерентных вихревых структур. Было проведено две серии расчетов для исследования структуры потока в зависимости от изменения различных условий.

В первой части исследования расчеты проводились для различных чисел Рэлея путем изменения кинематической вязкости среды. Во второй части исследования расчеты проводились при постоянной кинематической вязкости и фиксированной разности средней температуры между вертикальными стенками, варьируя значение горизонтального градиента температуры на стенках. Было обнаружено, что при определенном соотношении между вертикальным и горизонтальным температурными градиентами наблюдаются заметные горизонтальные колебания положения центрального восходящего потока с фиксированной низкой частотой. Было показано, что при слабом горизонтальном градиенте происходит только деформация конвективных ячеек в направлении градиентов и у порядочных осцилляций не наблюдается. Увеличении горизонтального градиента приводит к формированию циркуляционных течений по обе стороны от источника нагрева, в котором наблюдаются колебания на границе взаимодействия противоположных циркуляций. Дальнейшее увеличение горизонтального градиента приводит к исчезновению низкочастотных колебаний. Также было показано, что эффект не пропадает при увеличении числа Рэлея и можно ожидать его присутствия для крупномасштабных течений при определенных условиях. Для определения пространственного и временного периода колебаний были построены временные и пространственные (вдоль направления однородности потока) энергетические спектры течения. С помощью метода SPOD [74] были выделены когерентные моды потока и построены картины линий тока для энергонесущих мод. Основываясь на полученных результатах, была предложена модель, описывающая механизм образования колебаний температурного фронта и дана асимптотическая оценка периода колебаний в зависимости от числа Рэлея. Обнаруженный эффект осцилляций будет существенно влиять на горизонтальный перенос тепла импульса и импульса, будет усиливать турбулентное перемешивание, а также может приводить к всплескам скорости и эффектам перемежаемости в потоке. Эффект является существенно нелинейным и не аналогичен эффектам внутренних волн в устойчиво-стратифицированной среде.

### Глава 3. RANS-расчеты конвективных течений.

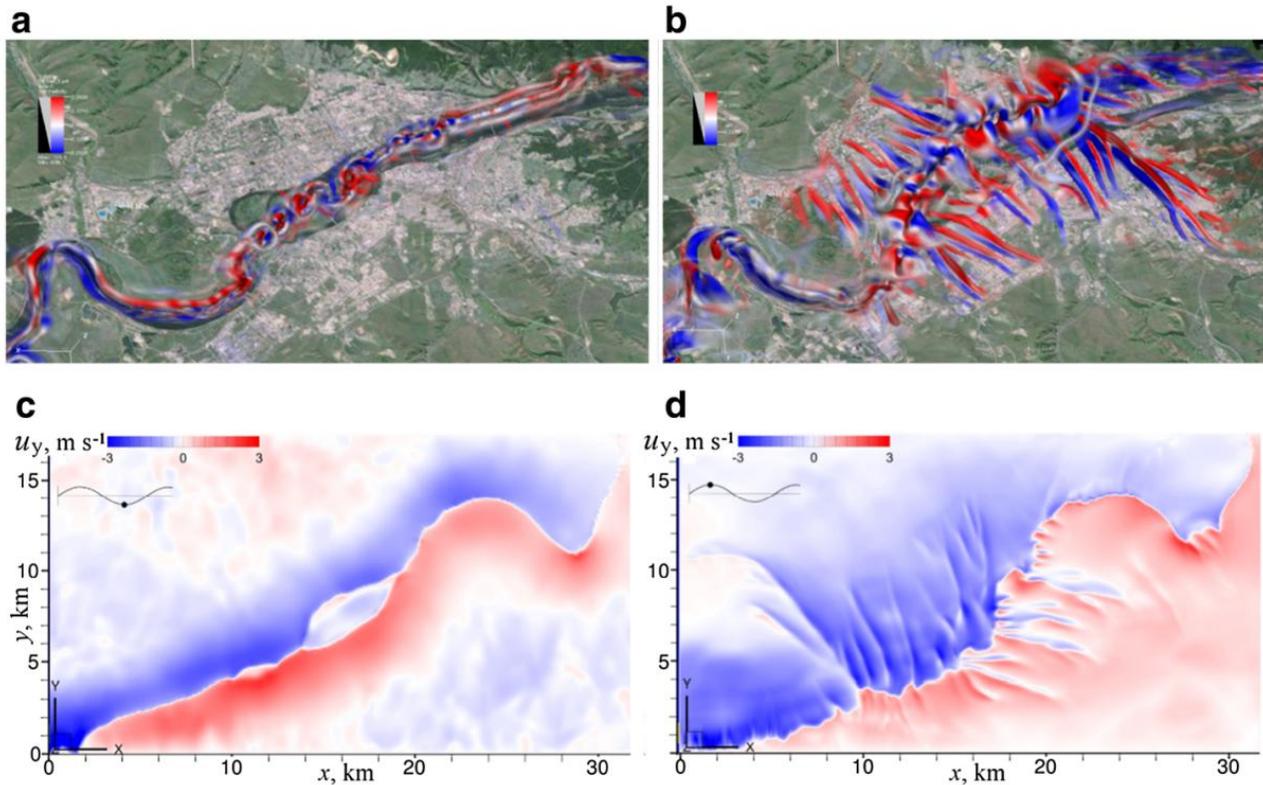


Рисунок 3.1 - Сверху: изоповерхности  $Q$ -критерия, раскрашенная по плотности спиральности ( $\omega_i u_i$ ). Снизу:  $y$ -компонента горизонтальной скорости на высоте 50 м над землей для двух моментов времени. а, b - 06:00, с, d - 18:00. RANS-расчет конвективных потоков над г. Красноярском [32].

Как было упомянуто ранее, ранее эффект низкочастотных колебаний положения восходящего потока над линейно-протяженным источником тепла (под которым подразумевалась незамерзающая р. Енисей) был замечен в расчетах динамики атмосферного пограничного слоя для г. Красноярска методом U-RANS [32] (Рисунок 3.1). В предыдущей главе было представлено исследование эффекта низкочастотных колебаний положения восходящего потока над линейно-симметричной температурной неоднородностью и было показано, что данный эффект появляется при определенных соотношениях между вертикальным и горизонтальными температурными градиентами и сохраняется при изменении числа Рэлея в интервале  $10^5 - 10^7$ . Однако остается открытым вопрос, как будет проявляться данный эффект при высоких числах Рэлея близких к тем, что наблюдаются в атмосферных течениях ( $Ra \sim 10^{13}$ ).

В рамках данной главы было предложено исследовать динамику конвективного пограничного слоя над линейно-симметричной температурной неоднородностью для большего пространственного масштаба: для области с фиксированным горизонтальным размером 1 x 1 км и

изменяемым вертикальным размером в интервале от 55 до 220 м. Среда обладала физическими характеристиками воздуха и числа Рэлея были в диапазоне  $10^{13}$  -  $10^{15}$ .

### **3.1. Разработка RANS модели для моделирования динамики пограничного слоя с неоднородной конвекцией**

Для проведения такого моделирования нужно иметь подходящую модель турбулентности, позволяющей правильно восстанавливать поверхностные потоки тепла и импульса по данным о распределении температуры на поверхности при грубом разрешении расчетной сетки. Для моделирования динамики конвективного пограничного слоя на большом масштабе на данный момент остается сложным использование LES и тем более DNS подходов, в связи с высокими вычислительными требованиями, поэтому чаще используются RANS модели.

Существует ряд развитых моделей динамики атмосферного пограничного слоя (АПС), включающих прогностические уравнения для корреляций второго (или даже более высокого) порядка. Эти модели оказались весьма успешными в прогнозировании суточного цикла в АПС в одномерном случае. Однако при расширении до трехмерного моделирования с неоднородными условиями эти модели обычно демонстрируют слабую численную устойчивость и ухудшение сходимости из-за большого количества решаемых уравнений.

В практическом метеорологическом моделировании широко используются модели с одним прогностическим уравнением с некоторыми допущениями моделирования, выведенными из теории подобия Монина-Обухова. Такие модели практичны в прикладной метеорологии несмотря на то, что они основываются на полуэмпирических соотношениях, и обычно их трудно распространить на сложные трехмерные модели.

Компромиссный подход представлен двухпараметрическими RANS-моделями, в которых длина смещения рассчитывается динамически на основе соотношения двух прогностических переменных. Для таких моделей можно распространить моделирование на гетерогенные трехмерные случаи. Обычно они обладают высокой численной стабильностью и гораздо менее требовательны к вычислительным ресурсам по сравнению с LES.

Одним из наиболее часто используемых двухпараметрических RANS-замыканий является  $k$ - $\epsilon$  модель, включающая всего два прогностических уравнения для кинетической энергии турбулентности ( $k$ ) и скорости ее диссипации ( $\epsilon$ ). Для замыкания системы уравнений используются алгебраические выражения для компонент тензора напряжений Рейнольдса. Однако текущие модели обладают рядом недостатков, применительно к восстановлению потоков тепла и импульса

по известному распределению температуры на поверхности. Ранее было показано ([6, 23, 80]), что стандартная  $k - \varepsilon$  модель переоценивает длину смешения в условиях устойчивой стратификации. Было предложено несколько модификаций, решающих эту проблему. В [6] было введено ограничение длины смешения путем изменения члена производства в уравнении на диссипацию. Однако это приводит к дополнительному параметру (максимальной длине смешения), который должен быть предоставлен извне модели. Подобный подход был далее развит в [23, 80], где параметры  $k - \varepsilon$  модели были изменены, чтобы дать решения, согласующиеся с теорией подобия Монино-Обухова. В [80] был изменен член производства; в то время как в [23], в дополнение к этому, значения константы  $C_\mu$  и  $Pr_t$  становятся функциями локального параметра устойчивости (градиентного числа Ричардсона).

Тестирование моделей обычно проводится для одного режима течения (устойчивого или неустойчивого), а переходные эффекты между режимами проверяются довольно редко. Одним из таких тестов, сочетающем в себе весь суточный цикл, является взаимное сравнение моделирования и данных экспериментальных измерений GABLS2 [81] на основе данных наблюдений CASES-99 [68] продолжительностью в несколько дней. В ходе этого взаимного сравнения была проверена способность моделей отображать весь суточный цикл сухого АПС. Для моделирования в качестве одного из граничных условий была задана эволюция температуры поверхности, по которой нужно было восстановить поток тепла с поверхности. С точки зрения восстановления потока тепла с поверхности результаты многих представленных моделей были далеки от данных в эксперименте, особенно в ночное время. Как отмечено в [81], корректное описание утреннего перехода оказалось одной из самых сложных задач для большинства сравниваемых моделей.

Баланс энергии (как тепловой, так и кинетической) в течение суточного цикла зависит от корректного восстановления поверхностных потоков тепла и импульса. Большинство сравниваемых моделей завышало амплитуду ночного потока тепла в почву, что приводило к отличию восстанавливаемых вертикальных профилей температуры от наблюдаемых в течение суток из-за нарушения баланса тепловой энергии. Даже детальное LES -моделирование может завышать величину ночного потока тепла на поверхности как было показано в недавнем взаимном сравнении результатов численного моделирования и экспериментальных наблюдений в Антарктиде GABLS4 [18].

Модель  $k - \varepsilon$  с ограничением на длину смешения [23] показала разумное согласие с наблюдениями в сравнении с другими моделями, но она обладает рядом подстроечных констант (в первую очередь – задаваемой явно максимальной длиной смешения), которые необходимо выбирать

для конкретных условий моделирования, что ограничивает ее применение в общем случае. Остается вопрос, можно ли улучшить восстановление теплового потока стандартной  $k - \varepsilon$  модели турбулентности, сохранив при этом исходные значения констант модели.

В первой части данной главы представлена модификация  $k - \varepsilon$  модели турбулентности с измененной параметризацией компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного теплового потока. Модификация модели направлена на улучшение восстановления поверхностного потока тепла и импульса по данным температуры поверхности в условиях суточного цикла. Предлагаемая модификация имеет ряд преимуществ. Она не вводит новые константы модели и не меняет значения существующих. Она основана на локальных характеристиках течения и имеет более высокую чувствительность к изменению параметров устойчивости, чем стандартная  $k - \varepsilon$  модель. Новизна предлагаемого подхода заключается во введении в модель параметров устойчивости таким образом, чтобы избежать взаимной компенсации его влияния на уравнения эволюции для  $k$  и  $\varepsilon$ , существующего в других моделях [6]. Представлены одноячеечный и одномерный варианты модели. Модель протестирована на данных GABLS-2 для сухого АПС вместе со стандартной  $k - \varepsilon$  моделью и ее модификацией с ограниченным масштабом длины смешения [80].

### 3.1.1. Классическая $k - \varepsilon$ модель турбулентности.

Сначала рассмотрим стандартную  $k - \varepsilon$  модель турбулентности. В метеорологии часто используются алгебраические модели для длины смешения, совмещенные с уравнением эволюции кинетической энергии турбулентности  $k$ . Однако в случаях с неоднородными условиями (например, сложный рельеф, растительный покров и т. д.) предпочтительно динамически оценивать масштаб длины смешения. В модели  $k - \varepsilon$  масштаб скоростей рассчитывается как  $u^* = C_\mu^{0.25} k^{0.5}$ , а длина смешения как  $l_m = u^{*3} / \varepsilon$ . Здесь двумя переменными модели являются кинетическая энергия турбулентности  $k$  и скорость ее диссипации  $\varepsilon$ . Затем, из размерных аргументов турбулентная вязкость  $\nu_t$  рассчитывается как комбинация масштабов скорости и длины:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

, где  $C_\mu = 0.09$ .

Прогностические уравнения для  $k$  и  $\varepsilon$  в одномерном случае:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P + G - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_{\varepsilon 1} (P + G) \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

где  $P$  и  $G$  — генерация турбулентности за счет сдвига и плавучести вычисляются соответственно:

$$P = - \left( \overline{u'w'} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \overline{v'w'} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) \quad (3.4)$$

$$G = -\beta g \overline{\theta'w'} \quad (3.5)$$

где  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.89$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.11$ .

Напряжение Рейнольдса и турбулентный поток тепла определяются с помощью гипотезы градиентной диффузии:

$$\overline{u'w'} = -\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.6)$$

$$\overline{v'w'} = -\nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.7)$$

$$\overline{\theta'w'} = -\frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (3.8)$$

, где  $Pr_t$  обычно принимается равным 0.9 для воздуха.

### 3.1.2. Модификация $k - \varepsilon$ модели с учетом локального числа Ричардсона.

Нетрудно показать, что равновесное значение турбулентной вязкости в случае с плавучестью отличается от нейтрального. Следуя работе [6], полагаем что локальное равновесие достигается при выполнении следующего условия:

$$P + G = \varepsilon \quad (3.9)$$

Затем, подставляя градиент скорости из уравнения (3.6) в уравнение (3.4), предполагая наличие только одной горизонтальной составляющей скорости, мы получаем

$$\nu_t = \frac{\overline{u'w'}^2}{\varepsilon} (1 - Ri_f) \quad (3.10)$$

где локальное число Ричардсона записывается как  $Ri_f = G/P$ .

Далее, пользуясь гипотезой локальной изотропии турбулентности, мы можем получить:

$$\nu_t \approx \nu_t^* = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} (1 - Ri_f) \quad (3.11)$$

Это определение отличается от исходного (3.1), сделанного для нейтральных условий. Это показывает потенциальную неспособность стандартной модели  $k - \varepsilon$  достичь правильного равновесия, когда эффекты плавучести начинают играть значительную роль.

Есть несколько возможностей ввести поправки на плавучесть в  $k - \varepsilon$  модель. Наиболее просто использовать определение (3.11) вместо (3.1) для турбулентной вязкости во всех уравнениях. Технически это можно рассматривать как превращение константы  $C_\mu$  в функцию, зависящую от локального числа Ричардсона  $Ri_f$ .

Однако рассчитанные профили скорости и потенциальной температуры, если рассматривать их в почти равновесных горизонтально-однородных условиях, слабо чувствительны к изменению  $C_\mu$ . Как показали Апсли и Кастро [6], если модель  $k - \varepsilon$  согласуется с логарифмическими профилями скорости, т. е. выполняется следующее соотношение между константами модели:

$$(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu} = \kappa^2 \quad (3.12)$$

(где  $\kappa = 0,4$  — постоянная Кармана) и выполняется соотношение равновесия (3.9), тогда прогностическое уравнение на  $\varepsilon$  становится зависимым не от  $k$  напрямую, а от комбинации  $\sqrt{C_\mu}k$ . Это означает, что увеличение  $C_\mu$  приведет к уменьшению равновесных значений  $k$ , оставляя результирующую турбулентную вязкость постоянной. Хотя это верно только в том случае, если выполняется уравнение (3.12), в общем случае эффект компенсации изменения  $C_\mu$  последующим противоположным изменением значений  $k$ , хотя и не полный, все же должен присутствовать. Это видно из уравнения на диссипацию (1.3) с применением предположения о равновесии (3.9):

$$0 = (C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2}) \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \right) \quad (3.13)$$

В локальном равновесии, в уравнении (3.13) диффузионное и стоковое слагаемые (т.к.  $C_{\varepsilon 2} > C_{\varepsilon 1}$ ) уравновешивают друг друга. Диффузионное слагаемое зависит от  $\sqrt{C_\mu}k$ . Таким образом, при изменении  $C_\mu$  усиление/ослабление диффузии  $\varepsilon$  будет приводить к росту равновесных значений  $\varepsilon$ , уменьшающему турбулентную вязкость, и компенсирующему эффект от увеличения  $C_\mu$ . В результате изменение  $v_t$  окажется существенно меньшим, чем изменение  $C_\mu$ , что делает модель слабо чувствительной к изменению значения  $C_\mu$ .

Этот эффект наиболее выражен вблизи поверхности земли, где в граничных условиях для  $\varepsilon$  обычно условия Дирихле (например, фиксируя длину смешения). В этой области обычно преобладает диффузия  $\varepsilon$  (из-за больших амплитуд градиентов  $\varepsilon$ ), поэтому эффект компенсации изменения  $C_\mu$  наиболее силен.

Стоковое слагаемое в уравнении (3.13) не зависит от значения  $C_\mu$  и изменяется соответственно изменениям в  $k$ . Однако в области, где в уравнении доминирует диффузия (то есть, где градиенты наиболее сильные), описанный компенсирующий эффект будет существенным.

Известно, что в горизонтально-однородных стационарных условиях для поддержания турбулентности значение числа Ричардсона не должно существенно превышать 0,21–0,25 [98]. Этот предел может быть несколько расширен за счет эффектов сильной шероховатости [24], однако для большинства атмосферных наблюдений  $Ri$  остается меньше 0,5. Таким образом, можно сделать вывод, что диапазон изменения  $C_\mu^* = C_\mu(1 - Ri_f)$  в уравнении (3.11) не должен быть больше чем в  $\approx 2$  раза. Тестовые расчеты с моделью  $k - \varepsilon$  для равновесных ночных условий показали, что уменьшение  $C_\mu$  в 2 раза приводит к изменению поверхностного потока тепла лишь на несколько процентов, что иллюстрирует описанный компенсаторный эффект.

В данной главе предлагается другой способ согласования модели с условием равновесия (9) путем модификации параметризации тензора напряжений Рейнольдса, сохраняя при этом классическую форму выражения для турбулентной вязкости (1):

$$\overline{u'w'}^* = -(1 - Ri_f)v_t \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.14)$$

$$\overline{v'w'}^* = -(1 - Ri_f)v_t \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.15)$$

Отличие от модификации на значения турбулентной вязкости (3.11) заключается в исключении эффекта модификации из диффузионного члена в уравнении (3.13). Для придания модификации самосогласованности необходимо также изменить параметризацию теплового потока, чтобы убрать циклическую зависимость  $Ri_f$ :

$$\overline{\theta'w'}^* = -(1 - Ri_f) \frac{v_t}{Pr_t} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.16)$$

Моделирование показывает значительные различия между формулировками (3.11) и (3.14 + 3.15 + 3.16). С последней модификации влияние условий плотностной стратификации на потоки явного тепла и импульса в несколько раз сильнее.

### 3.1.3. Модификация $k - \varepsilon$ модели с ограничением на длину смешения.

Для сравнения с предложенной моделью и для иллюстрации вышеупомянутого компенсационного эффекта, возникающего при использовании выражения (3.11) для турбулентной вязкости, мы решили использовать модель из [80], которая развивает подход, представленный в

работе [6], делая модель согласованной с теорией подобия Монина – Обухова. В дополнение к использованию уравнения (3.11) вместо (3.1) эта модификация  $k - \varepsilon$  включает новое определение  $C_{\varepsilon 1}$ , делающее его функцией масштаба длины смешения:

$$C_{\varepsilon 1}^* = [C_{\varepsilon 1} + (F + 1)(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})] \quad (3.17)$$

$$F = -\left(1 - \frac{G}{P + G}\right)^2 \left(\frac{l_m}{l_{max}} + 1\right) \left(1 - \frac{l_m}{l_{max}}\right)^3 \quad (3.18)$$

, где предполагается, что масштаб длины смешения имеет следующий вид:

$$l_m = \frac{\kappa Z}{1 + \frac{\kappa Z}{l_{max}}} \quad (3.19)$$

Эта модель вводит ограничение на масштаб длины смешения  $l_{max}$ . Для общего случая изменяющейся устойчивости авторы [80] не дают определенной оценки для  $l_{max}$ . В данном моделировании  $l_{max}$  был выбран равным высоте пограничного слоя.

## 3.2. Детали расчетов

### 3.2.1. Описание модели в одноячеечной постановке.

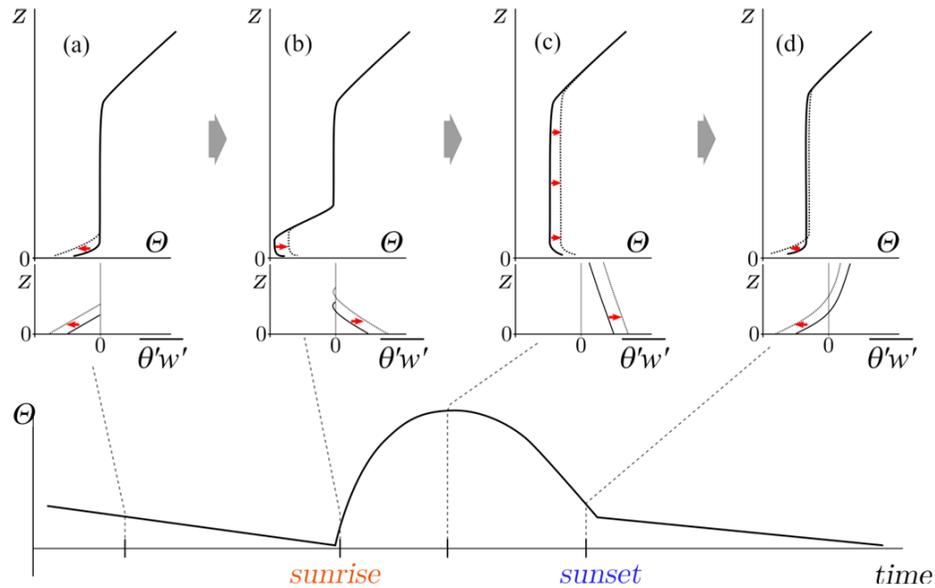


Рисунок 3.2 - Упрощенная схема эволюции температурного профиля в течение суточного цикла в сухом атмосферном пограничном слое: (a) Ночные стабильные условия. (b) Утренний переход. (c) Дневные условия. (d) Вечерний переход

Сначала приведем упрощённую формулировку модели, основанную на логарифмических профилях температуры и скорости, для восстановления эволюции потоков тепла и импульса при наличии соответствующих начальных и граничных условий. Начнем с описания эволюции температурных профилей в течение типичного суточного цикла сухого атмосферного пограничного слоя (АПС). Упрощённое представление эволюции профиля температуры в течение суток показано на Рисунке 3.2.

Выделим три типичных стадии эволюции суточного цикла. Сначала рассмотрим ночное охлаждение с формированием приземного слоя инверсии. На этом этапе поток тепла является отрицательным (то есть направленным к поверхности земли). Высота слоя инверсии постепенно увеличивается, что сопровождается медленным снижением температуры поверхности. Над слоем инверсии температура на этом этапе практически не изменяется. Вертикальное интегрирование температурного профиля от поверхности до высоты инверсии пропорционально количеству тепла, потерянного во время стадии охлаждения (Рисунок 3.2а).

Далее, при утреннем переходе конвективный слой смешения начинает расти от поверхности (Рисунок 3.2b). Верхняя граница этого слоя, по мере его прогрева, следует «замороженному» ночному температурному профилю (приземной инверсии). Когда количество накопленного при нагреве тепла становится равным потерям во время ночного охлаждения, происходит резкий «скачок» высоты слоя смешения, и он заполняет весь объем под запирающей инверсией на большей высоте (Рисунок 3.2c). Затем профиль развивается по аналогии с типичной проникающей конвекцией. Тепло от поверхности распределяется по всей высоте слоя смешения, способствуя увеличению его средней температуры.

Далее, во время вечернего перехода, когда солнечный нагрев ослабевает (Рисунок 3.2d) и температура поверхности падает ниже средней температуры слоя смешения, начинает формироваться новая приземная инверсия, и цикл повторяется.

В обеих ситуациях — ночного охлаждения и дневного нагрева — максимум вертикального турбулентного теплового потока находится рядом с поверхностью. По мере подъема к высоте слоя смешения или стратифицированного слоя этот поток уменьшается до нуля. В обоих случаях наиболее простым приближением для профиля теплового потока является линейная функция. Такое упрощение позволяет интерпретировать процесс как равномерное распределение теплового потока от поверхности по объему стратифицированного слоя/смешанного слоя.

Из описанного выше упрощенного представления эволюции температурного профиля становится ясно, что модель с одной ячейкой должна учитывать накопленное тепло в

приповерхностном слое, чтобы воспроизвести более или менее реалистичные данные о потоках тепла.

Для упрощенного построения модели примем следующую форму приповерхностных профилей температуры и скорости:

$$U(z) = -\frac{u'w'_0}{\kappa C_\mu^{0.25} \sqrt{k_0}} \ln\left(\frac{z + z_r^u}{z_r^u}\right) \quad (3.20)$$

$$\Theta(z) = \Theta_w - \frac{\theta'w'_0}{\kappa C_\mu^{0.25} \sqrt{k_0}} \ln\left(\frac{z + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right) = \Theta_w - \frac{\Theta_w - \Theta(h)}{\ln\left(\frac{h + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)} \ln\left(\frac{z + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right) \quad (3.21)$$

Их формы аналогичны стандартным пристенным функциям [50], параметризованным выражением  $u^* = C_\mu^{0.25} k_0^{0.5}$ , где  $k_0$  — кинетическая энергия турбулентности вблизи поверхности,  $\theta'w'_0$  и  $u'w'_0$  — турбулентные потоки тепла и импульса вблизи поверхности,  $\Theta_w$  — температура поверхности,  $z_r^\theta$  и  $z_r^u$  — масштаб шероховатости для тепловых и импульсных процессов соответственно.

Введем высоту приповерхностного слоя (устойчивого или неустойчивого в зависимости от времени)  $h$  и температуру на верхней границе этого слоя  $\Theta(h)$ . Эти два последних параметра необходимы для полного определения температурного профиля.  $\Theta(h)$  предполагается изменяющимся значительно медленнее по сравнению с температурой поверхности  $\Theta_w$  в течение всего суточного цикла.

Можно выполнить вертикальное интегрирование теплового потока (до высоты  $h$ ), чтобы получить общее накопленное количество тепла на единицу площади (опустим умножение на удельную теплоемкость и плотность для упрощения):

$$Q = \int_0^h (\Theta(z) - \Theta(h)) dz = (\Theta_w - \Theta(h)) \left( \frac{h + z_r^\theta}{\ln\left(\frac{h + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)} - z_r^\theta \right) \quad (3.22)$$

Предполагая, что высота шероховатости значительно меньше общей высоты слоя, можем использовать следующее приближение:

$$Q \approx \frac{h(\Theta_w - \Theta(h))}{\ln\left(\frac{h + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)} \quad (3.23)$$

Это уравнение может быть обращено для расчета величины  $h$  при заданном накопленном тепле  $Q$ , температуре поверхности  $\Theta_w$  и температуре на верхней границе слоя  $\Theta(h)$ :

$$h \approx \frac{Q \ln\left(\frac{h + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)}{\Theta_w - \Theta(h)} \quad (3.24)$$

Накопленное тепло может быть вычислено путем интегрирования во времени восстановленного теплового потока от поверхности (тепловой поток  $\overline{\theta'w'}_0$  здесь найден из выражения 3.21):

$$\frac{dQ}{dt} = \overline{\theta'w'}_0 = \frac{\Theta_w - \Theta(h)}{\ln\left(\frac{h + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)} \kappa C_\mu^{0.26} \sqrt{k_0} \quad (3.25)$$

Во время фазы охлаждения верхняя температура считается постоянной, но, когда охлаждение прекращается и тепловой поток меняет знак, слой смешения проникающей конвекции начинает расти от поверхности. Его рост ограничен запирающей инверсией, сформировавшейся в течение ночи (Рисунок 3.2b).

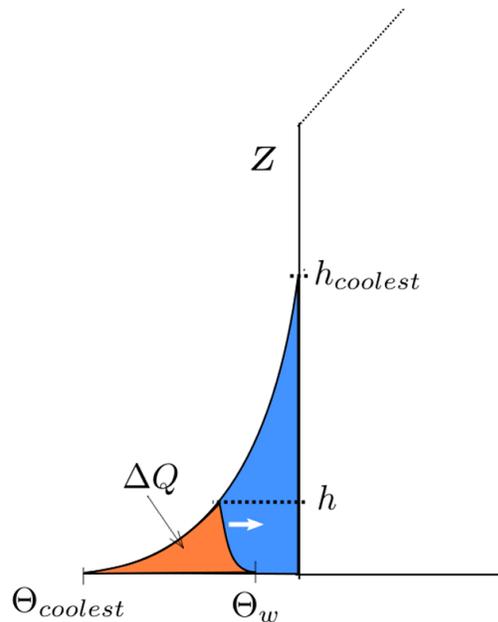


Рисунок 3.3 - Схематическое представление модели с одной ячейкой. Фаза нагрева. Пунктирная линия показывает высоту растущего смешанного слоя. Белая стрелка указывает направление эволюции дневного температурного профиля

На Рисунке 3.3 схематически показано количество тепла, накопленного во время утреннего перехода ( $\Delta Q$ ). Оно может быть получено путем интегрирования в области пересечения двух логарифмических кривых, вычисленных по уравнению (3.21) с одинаковой высотой  $h$ . Первая логарифмическая кривая представляет собой самый холодный профиль ночного охлаждения

предыдущей ночи (с температурой  $\Theta_{\text{coolest}}$  на уровне поверхности). Вторая кривая – текущий температурный профиль, который является инверсным и принимает значение  $\Theta_w$  на поверхности. Простое интегрирование приводит к следующей оценке:

$$\Delta Q \approx \frac{h(\Theta_w - \Theta_{\text{coolest}})}{\ln\left(\frac{h + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)} \quad (3.26)$$

$$h \approx \frac{\Delta Q \cdot \ln\left(\frac{h + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)}{\Theta_w - \Theta_{\text{coolest}}} \quad (3.27)$$

Мы сохраняем последний (самый холодный) логарифмический профиль фазы охлаждения после того, как тепловой поток  $\theta'w'_0$  меняет знак. Затем, на стадии нагрева, когда  $h > h_{\text{coolest}}$ , в уравнении (3.25)  $Q$  следует заменить на  $\Delta Q$ . После того как температура поверхности в фазе нагрева становится равной температуре на верхней границе слоя (Рисунок 3.2с), мы возвращаемся к исходной формулировке уравнения (3.25). Во время вечернего перехода, после того как  $\Theta_w$  становится меньше  $\Theta(h)$ , цикл повторяется с первой фазы.

Значение напряжений Рейнольдса было вычислено по уравнению (3.20), предполагая, что скорость на некоторой большой высоте остается постоянной в течение всей симуляции. Согласно наблюдательным данным [81], это значение было выбрано равным  $U = 8$  м/с на высоте 800 м.

Чтобы замкнуть систему, необходимо решить прогностическое уравнение для  $k_0$ :

$$\frac{\partial k_0}{\partial t} = (1 - Ri_{f0}) \left( \frac{(\overline{u'w_0})^2}{\nu_t^0} + \beta g \overline{\theta'w_0} \right) - \varepsilon_0 \quad (3.28)$$

$$Ri_{f0} = \frac{\beta g \overline{\theta'w_0}}{\left( \frac{(\overline{u'w_0})^2}{\nu_t^0} \right)} \quad (3.29)$$

Здесь мы используем стандартное соотношение для турбулентной вязкости (аналогично уравнению (3.1)):

$$\nu_t^0 = C_\mu \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \quad (3.30)$$

Наконец, мы получили значение диссипации путем интегрирования по безразмерной высоте  $z^* = z/z_r^u$  от 0 до 300:

$$\varepsilon_0 = C_\mu \frac{k_0^{3/2}}{\kappa(300 \cdot z_r^u)} \ln(300) \quad (3.31)$$

Значение 300 для  $z^*$  было получено для соответствия данным наблюдений. Оно может рассматриваться как значение «эффективной» высоты поверхностного слоя, определяющей приповерхностные турбулентные потоки.

Таблица 3.1 - Описание рассматриваемых моделей турбулентности для одноячеечной формулировки

Название модели	Уравнение на $k_0$
Модель 00	$\frac{\partial k_0}{\partial t} = \left( \frac{(\overline{u'w_0})^2}{\nu_t^0} + \beta g \overline{\theta'w_0} \right) - \varepsilon_0$
Модель 01	$\frac{\partial k_0}{\partial t} = (1 - Ri_{f0}) \left( \frac{(\overline{u'w_0})^2}{\nu_t^0} + \beta g \overline{\theta'w_0} \right) - \varepsilon_0$

Для одноячеечной симуляций сравнивались модели без поправки на плавучесть в уравнении для  $k_0$  – Модель 00, и модели с поправкой на плавучесть – Модель 01 (Таблица 3.1).

### 3.2.2. Описание модели в одномерной постановке.

В одномерной постановке рассматриваются прогностические уравнения для температуры и двух горизонтальных составляющих скорости потока:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f_{\text{cor}}(V - V_{\text{geo}}) - \frac{\partial(u'w')}{\partial z} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = f_{\text{cor}}(U_{\text{geo}} - U) - \frac{\partial(v'w')}{\partial z} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial(\theta'w')}{\partial z} \quad (3.34)$$

Таблица 3.2 - Описание рассматриваемых моделей турбулентности для одномерного случая

Название модели	Описание	Используемые уравнения
Модель 0	Стандартная $k - \varepsilon$ модель	(3.1)-(3.8)
Модель 1	Текущая модификация	(3.1)-(3.5), (3.14)-(3.16)
Модель 2	Модификация с ограничением на длину смещения	(3.2), (3.3) и (3.11) (с $C_{\varepsilon 1}$ из (3.4)-(3.8) и (3.17))

Для замыкания рассматривались три варианта: Модель 0, Модель 1 и Модель 2 (Таблица 3.2).

### 3.3. Пристенные функции

Для моделирования RANS с грубой сеткой целесообразно использовать подход пристенных функций для граничных условий. В текущем одномерном моделировании использовалась следующая формулировка пристенных функций. Применяя логарифмический закон для профилей температуры и скорости, получаем [50]:

$$-\overline{u'w'}_0 = \frac{\kappa C_\mu^{0.25} \sqrt{k_1} U_1}{\ln\left(\frac{z_1 + z_r^u}{z_r^u}\right)} \quad (3.35)$$

$$-\overline{\theta'w'}_0 = \frac{\kappa C_\mu^{0.25} \sqrt{k_1} (\Theta_1 - \Theta_w)}{\ln\left(\frac{z_1 + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)} \quad (3.36)$$

где  $\Theta_1$  и  $U_1$  — значения температуры и скорости в первом узле сетки на высоте  $z_1$ .

Приравняв тепловой поток в первом узле сетки к тепловому потоку на границе, получим следующее граничное условие для потенциальной температуры:

$$\Theta_1 = \frac{\nu_{t0}}{Pr_t(A_\theta z_1 + \nu_{t0})} \Theta_2 - \Theta_w \quad (3.37)$$

Аналогично для скорости в первом узле сетки получаем:

$$U_1 = \frac{\nu_{t0}}{(A_u z_1 + \nu_{t0})} U_2 \quad (3.38)$$

$$A_u = \frac{\kappa C_\mu^{0.25} \sqrt{k_1}}{\ln\left(\frac{z_1 + z_r^u}{z_r^u}\right)} \quad (3.39)$$

$$A_\theta = \frac{\kappa C_\mu^{0.25} \sqrt{k_1}}{\ln\left(\frac{z_1 + z_r^\theta}{z_r^\theta}\right)} \quad (3.40)$$

Для  $k$  использовалось условие нулевого градиента на нижней границе. В первом узле сетки было установлено стандартное значение на скорость диссипации энергии:

$$\varepsilon = C_\mu^{0.75} \frac{k^{3/2}}{\kappa z_1} \quad (3.41)$$

Одним важным дополнением является оценка высоты пограничного слоя  $h$ . Для оценки этого параметра использовалось предположение о линейной зависимости высоты от турбулентного теплового потока. Предполагается, что турбулентный тепловой поток уменьшается до нуля линейно — от нижней границы, где его величина максимальна, до верхней границы пограничного слоя. На

основе этого используется следующая зависимость для оценки значения  $h$  по данным о приземном слое.

$$h = \frac{\overline{\theta'w'_0}}{\left(\frac{\partial\theta'w'}{\partial z}\right)_0} \quad (3.42)$$

### 3.4. Начальные и граничные условия и детали расчета

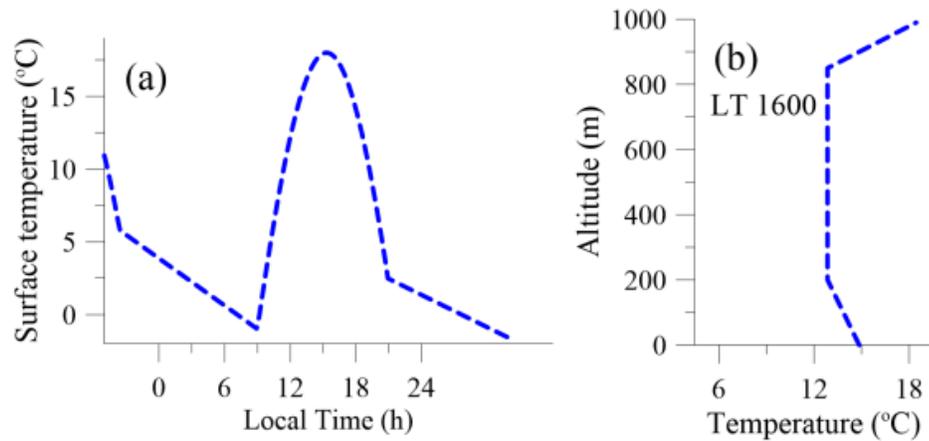


Рисунок 3.4 - (a) График изменения температуры поверхности во времени (данные взяты из GABLS2 [81]). (b) Начальный температурный профиль (16:00 местного времени).

Параметры моделирования были взяты аналогично приведенным в GABLS2 [81]. Были использованы следующие значения для констант:  $U_{geo} = -9$  м/с,  $V_{geo} = 3$  м/с,  $f_{cor} = 0,000139$ ,  $z_r^u = 0,03$  м,  $z_r^\theta = 0,003$  м. Как описано в GABLS2 [81], моделирование начинается в 16:00 22 октября и длится 48 часов. Начальный профиль температуры и график изменения температуры поверхности показаны на Рисунке 3.4. Для  $k$  и  $\varepsilon$  был задан начальный равномерный профиль со значениями  $0,01$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и  $0,001$  м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup> соответственно. Для одномерного моделирования использовалась равномерная сетка с высотой ячейки 6 м (были протестированы еще две сетки с высотой ячейки 1.5 м, 3 м и 12 м). Общая высота сетки составила 4000 м. На верхней границе для потенциальной температуры задавались условия постоянного градиента 4 °С/км. Для всех остальных прогностических переменных на верхней границе задавались условия нулевого градиента. Временной шаг моделирования был установлен равным 0,02 с.

### 3.5. Верификация модели. Эксперимент GABLS. Одноячеечная модель.

Для одноячеечной симуляций сравнивались модели без поправки на плавучесть в уравнении для  $k_0$  – Модель 00, и модели с поправкой на плавучесть – Модель 01 (Таблица 3.2).

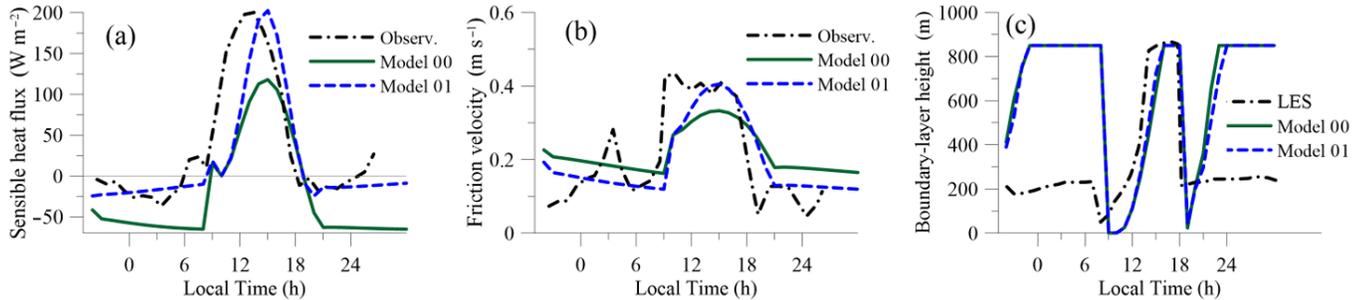


Рисунок 3.5 - Сравнение результатов одноячеечного расчета с данными наблюдений из GABLS2 [81]. (a) Эволюция потока тепла. (b) Эволюция скорости трения. (c) Эволюция высоты пограничного слоя

На Рисунке 3.5а показано сравнение наблюдаемой и восстановленной эволюции теплового потока. Из результатов видно, что ночью разница между моделями значительна. Модель 00 показывает гораздо большую величину отрицательного теплового потока, переоценивая наблюдаемое значение. Это поведение было отмечено во многих моделях из [81], включая LES-симуляцию.

Представленная модификация с учетом локального числа Ричардсона (Модель 01) улучшает ситуацию, приближая тепловой поток к наблюдаемым значениям ночью. Что касается скорости трения (Рисунок 3.5b), обе модели дают близкие результаты ночью, но Модель 01 показывает немного более низкое значение. Хотя сложно точно сказать, какая модель лучше предсказывает утреннюю часть симуляции, в условиях вечерней плотностной устойчивости Модель 01 ближе к наблюдениям.

Днем ситуация меняется, и Модель 01 показывает более высокие величины теплового потока и скорости трения по сравнению с Моделью 00. Оба параметра улучшаются с использованием предложенной модификации, связанной с плавучестью. Пиковые значения ночного и дневного теплового потока достаточно хорошо восстанавливаются с помощью предложенной модели. Однако обе модели демонстрируют значительное запаздывание в начале утреннего перехода. Это также было отмечено во многих моделях, протестированных в GABLS2. Предполагается, что это связано с неспособностью моделей учитывать рост когерентных конвективных ячеек, которые ускоряют перемешивание во время утреннего перехода.

Из-за своей простоты модели с одной ячейкой дают нереалистичные результаты для высоты пограничного слоя (Рисунок 3.5с), особенно ночью, когда модели показывают завышенные значения  $h$  (полученные из уравнения (3.24)). Однако днем скорость роста  $h$  достаточно реалистична, схожа с LES-результатами, но снова с небольшим временным запаздыванием.

В целом, предложенная форма модели с одной ячейкой хорошо работает для восстановления поверхностных потоков, что делает ее перспективной для дальнейшего развития в качестве пристенной функции для сложных трехмерных симуляций.

### 3.6. Верификация модели. Эксперимент GABLS. Одномерная модель.

#### 3.6.1. Зависимость решения от пространственного разрешения сетки.

Для одномерной постановки предложенной модели необходимо было проверить зависимость решения от шага расчетной сетки. В GABLS2 сообщалось о значительной разнице между результатами, имеющими размер шага сетки вблизи стенки менее 5 метров и более 5 метров. Для текущей модели мы проверили 4 расчета с разрешениями: 1.5 м, 3 м, 6 м и 12 м.

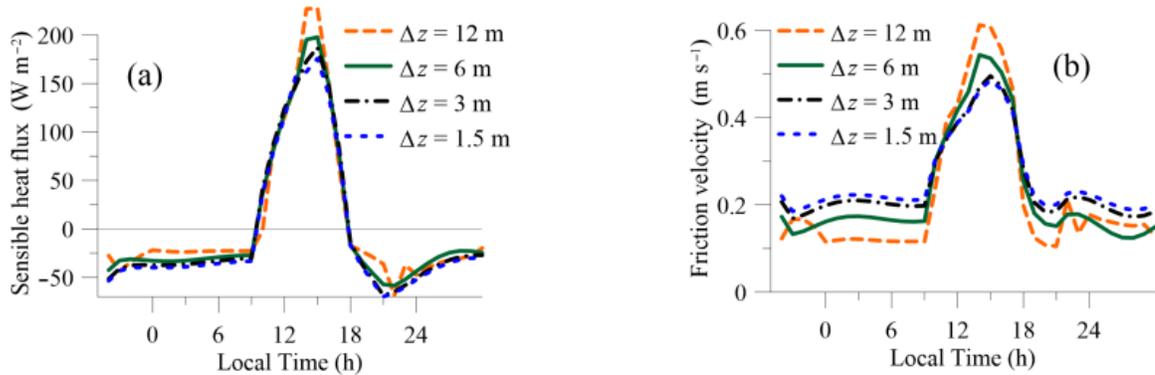


Рисунок 3.6 - Результаты теста на зависимость решения от пространственного разрешения сетки модели 1: (a) Поток тепла. (b) Скорость трения

Результаты представлены на Рисунке 3.6. Видно, что результаты сходятся при разрешении сетки 1,5 м. Для шагов сетки 1,5, 3 и 6 м все графики тепловых потоков очень близки, а для шага 12 м мы видим небольшую разницу в дневное время. Тем не менее, даже для такого грубого разрешения (12 м) поверхностный тепловой поток мало меняется от разрешения сетки, а скорость трения сходится для масштабов 1.5 и 3 м.

Это изменение с увеличением размера ячейки ожидаемо, поскольку градиенты становятся все менее и менее разрешенными. Однако, поскольку модель предполагает наличие хорошо развитого

логарифмического слоя в первом узле сетки как для температуры, так и для скорости, высота первого узла сетки в единицах стенки  $z^* = z/z_r^u$  должна быть больше 100. В нашем случае наилучшее согласие с экспериментом показало значение  $z^* = 200$ , что соответствует  $\Delta z = 6$  м. Приведенные ниже результаты были получены при равномерном шаге сетки  $\Delta z = 6$  м. Предполагается, что такое разрешение является адекватным для трехмерных RANS-расчетов, в которых можно использовать предложенную модель.

### 3.6.2. Ночные условия

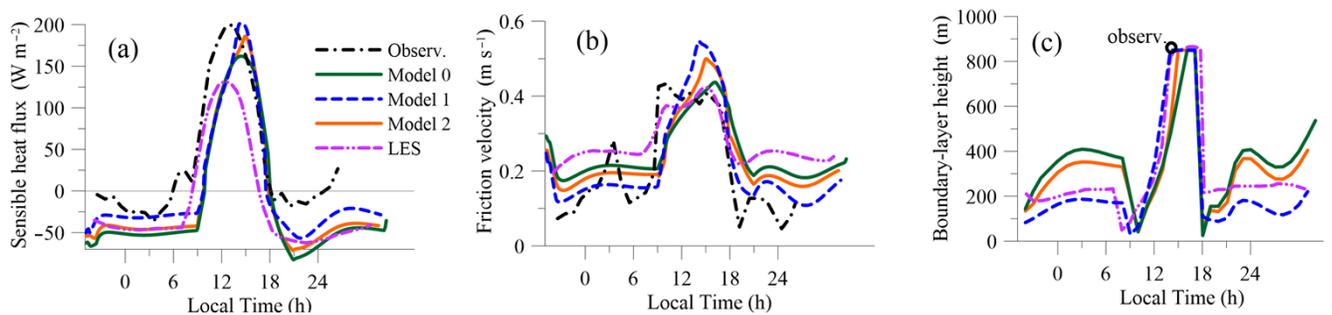


Рисунок 3.7 - Сравнение результатов одномерного расчета с данными наблюдений из GABLS2 [81]. (a) Эволюция потока тепла. (b) Эволюция скорости трения. (c) Эволюция высоты пограничного слоя

Из сравнения рассмотренных моделей с данными наблюдений (Рисунок 3.7a) видно, что перед утренним переходом все три модели недооценивают величину теплового потока. Та же недооценка также наблюдается для 3D LES-результатов из [81]. Однако Модель 1 показывает меньшую величину отрицательного теплового потока, чем две другие модели (и результаты LES). Модель 2, которая использует модифицированное определение (3.11) для турбулентной вязкости, демонстрирует очень небольшую разницу по сравнению со стандартной  $k - \epsilon$  моделью (Модель 0) в отношении величины теплового потока. Это иллюстрирует эффект компенсации, описанный в разделе 3.1.2. Предложенная модификация (Модель 1) обладает значительно большей чувствительностью к эффектам устойчивости, тогда как, для исходной модели чувствительность к эффектам стратификации явно недостаточна. Модель с ограничением на длину смешения также недостаточна чувствительна к переходам от устойчивой стратификации к конвективной неустойчивости. Это также заметно на профилях температуры (Рисунок 3.8d), где высота пограничного слоя для Модели 1 ниже, что связано с меньшими потерями тепла в течение ночи.

Для профилей скорости трения (Рисунок 3.7b) Модель 1 показывает наименьшие значения ночью и лучше согласуется с наблюдениями по сравнению с двумя другими моделями и 3D LES-

результатами из [81]. Эволюция высоты пограничного слоя  $h$  (Рисунок 3.7с) демонстрирует, что Модель 0 и Модель 2 существенно переоценивают значение  $h$  ночью (Модель 2 немного ближе к LES-значениям), тогда как Модель 1 показывает гораздо лучшее согласие с данными из [81].

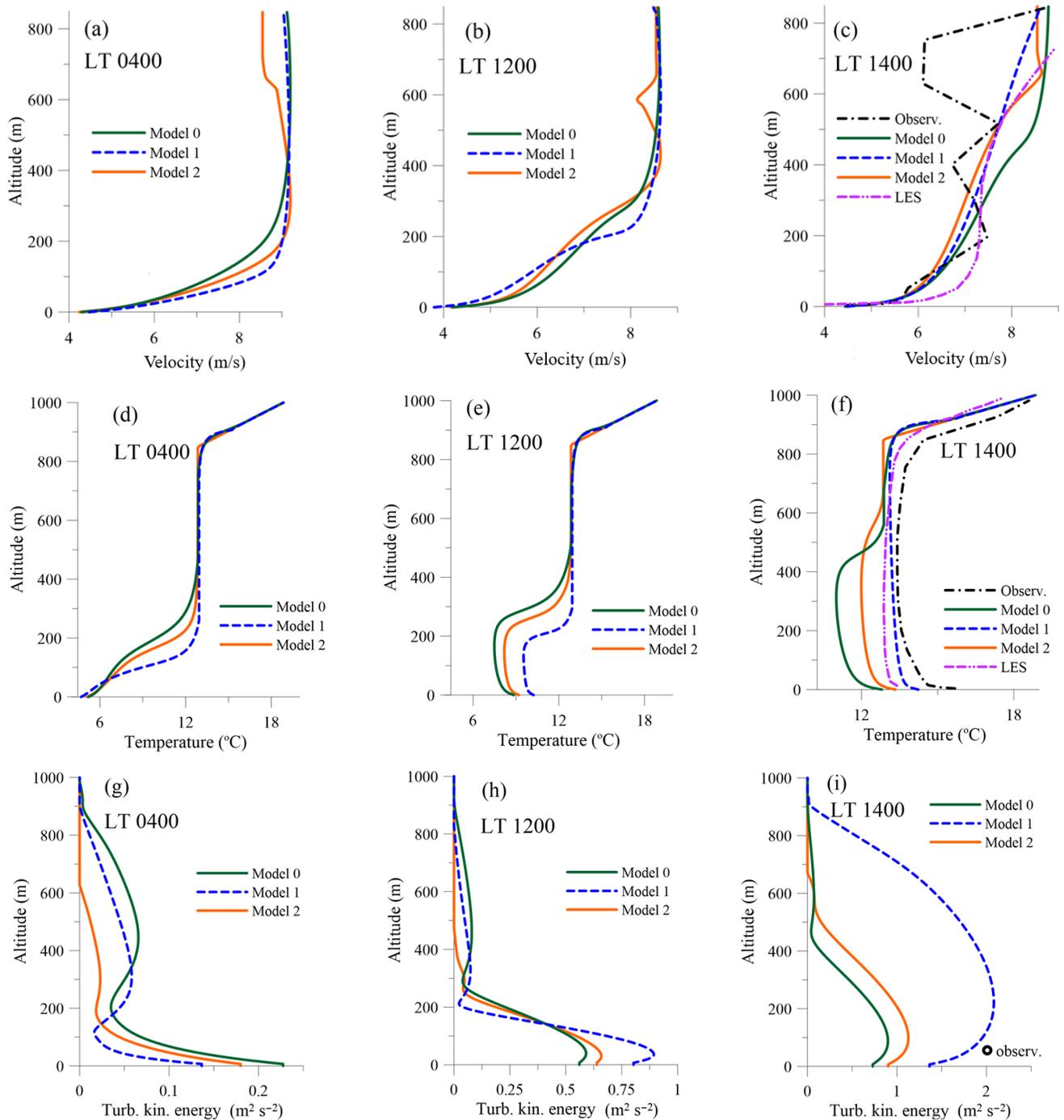


Рисунок 3.8 - Вертикальные профили переменных потока в разные моменты времени: (a-c) Скорость. (d-f) Потенциальная температура. (g-i) Кинетическая энергия турбулентности. Черная точка под графиком (i) соответствует измеренному значению кинетической энергии турбулентности, указанному в GABLS2 [81]

Вертикальные профили скорости для ночных условий показаны на Рисунке 3.8а. Видно, что Модель 2 имеет максимум скорости над слоем приземной инверсии (ночное струйное течение) в верхней части пограничного слоя, в то время как две другие модели этого не делают. Такое поведение согласуется с наблюдениями и показывает положительный эффект ограничения длины смешения. Однако профиль скорости для Модели 2 показывает завышенную высоту слоя смешения, тогда как Модель 1 дает более реалистичные результаты для этого параметра.

### 3.6.3. Утренний переход к условиям дневной неустойчивости

Во время утреннего перехода наблюдаемая высота АПС быстро растет. Это сопровождается увеличением скорости ветра. Утренний переход оказывает влияние на потоки тепла и импульса. Из Рисунка 3.7а видно, что Модель 1 довольно хорошо предсказывает величину пика теплового потока, но с задержкой во времени перехода. Модель 1 показывает значения пикового дневного теплового потока, наиболее близкие к наблюдениям, тогда как две другие Модели занижают его.

Из вертикальных графиков температуры (Рисунок 3.8е, f) видно, что Модель 1 воспроизводит баланс тепловой энергии потока более правильно, чем две другие модели. Сравнение с наблюдаемым профилем температуры в 14:00 на Рисунке 3.8f показало значительно более низкие температуры и разные фазы эволюции АПС для Моделей 0 и 2. Это является следствием завышения отрицательного потока явного тепла в ночное время в моделях 0 и 2.

Поведение скорости трения (Рисунок 3.7b) аналогично многим моделям, представленным в сравнении GABLS2 [81], и демонстрирует постепенный рост вместо быстрого перехода, наблюдаемого экспериментально. Такое отклонение от наблюдаемых значений может быть связано с отсутствием вклада когерентных структур (конвективных ячеек и валов) в значения потоков тепла и импульса. Эти структуры разрешаются в 3D LES, что отражается в хорошем согласии дневных данных 3D LES с наблюдениями. Значение скорости трения, полученное в Модели 1, немного завышено в середине дня по сравнению с результатами двух других моделей, но наклон роста скорости трения выше, что показывает более быструю динамику перехода, чем у двух других моделей. Этот более быстрый переход также очевиден на графике динамики высоты пограничного слоя (Рисунок 3.7с). Модель 1 имеет самый быстрый рост  $h$ , что близко к результатам LES из GABLS2 [81]. И здесь Модель 2 показывает результаты между результатами Модели 0 и Модели 1

Для профилей скорости ветра Модель 1 дает более точные прогнозы высоты пограничного слоя. Это хорошо заметно при сравнении с экспериментально наблюдаемым профилем скорости ветра в 14:00 (Рисунок 3.8с).

Профили турбулентной кинетической энергии на 14:00 (Рисунок 3.8i) показывают гораздо более высокие значения для Модели 1, чем для двух других. Измеренное значение кинетической энергии турбулентности, указанное в GABLS2 [81], показанное черной точкой на (Рисунок 3.8i), лучше согласуется с более высокими значениями Модели 1.

### 3.6.4. Вечерний переход к условиям ночной устойчивости

Во время вечернего перехода модель  $k - \epsilon$  и некоторые модели первого порядка из сравнения GABLS2 показывают отрицательный пик потока тепла, также видимый во всех результатах одномерной модели текущей статьи (Рисунок 3.7а) в 21:00. Похожий отрицательный пик, но более размытой формы, виден даже в результатах 3D LES из GABLS2. Однако в экспериментальных наблюдениях он отсутствует. Мы предполагаем, что вероятной причиной этого является нарушение гипотезы градиентной диффузии, на которой основаны все модели  $k - \epsilon$  и LES. Этот эффект также ярко выражен в недавнем взаимном сравнении GABLS4 [18], где большинство моделей LES переоценивают величину отрицательного потока тепла во время перехода от неустойчивости к устойчивости. Этот эффект требует дальнейшего изучения, поскольку он играет важную роль в балансе тепловой энергии суточного цикла. Среди моделей, протестированных в этой работе, наименьшая амплитуда этого эффекта наблюдается в Модели 1. Модель 0 и Модель 2 демонстрируют весьма похожее поведение. Эволюция  $h$  при переходе к стабильности также показывает гораздо лучшие результаты для Модели 1 (Рисунок 3.7в).

### 3.7. Исследование влияния поверхностной линейно-симметричной температурной неоднородности на динамику конвективного пограничного слоя

Как было показано, предложенная модификация  $k - \epsilon$  модели с измененной параметризацией компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного теплового потока в зависимости от локального числа Ричардсона позволяет достаточно хорошо восстанавливать потоки тепла с поверхности по значению температуры на поверхности при довольно низком разрешении сетки, что делает данную модель перспективной для использования в расчетах, где имеет значение

распределения поверхностной температуры, как в нашем случае, при наличии поверхностной температурной неоднородности.

В работе [32], при исследовании динамики конвективных потоков над рекой Енисей для г. Красноярска методом U-RANS, когерентные структуры, приводящие к возникновению эффекта осцилляций течения, сформировались над теплой рекой во время утреннего перехода к конвективной неустойчивости. В этих условиях слой приподнятой инверсии ограничивает сверху область конвективного течения. Можно ожидать наличия динамики когерентных структур, подобной описанной в Главе 2 в подобных условиях. А также, важно сравнить случаи с ограничением потока слоем инверсии и стенкой. Для исследования эффекта возникновения осцилляций течения над линейно-симметричным источником тепла при высоких числах Рэлея было предложено провести серию RANS-расчетов с использованием предложенной в данной главе модификацией  $k - \varepsilon$  модели турбулентности.

### 3.7.1. Детали расчетов

Представленная модель была реализована в OpenFOAM путем модификации стандартной  $k - \varepsilon$  модели. Для решения поставленной задачи использовался стандартный решатель, позволяющий решать уравнения термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска (buoyantBoussinesqPimpleFoam). В работе методом U-RANS решались осредненные уравнения Навье – Стокса и переноса тепла в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + 2 \epsilon_{ijk} \Omega_j U_k = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g \beta (\theta - \theta_0) \delta_{i3}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\theta' u_i'}^*, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.46)$$

Где скорость представлена как  $u_i = U_i + u_i'$ , а температура как  $T = \theta + \theta'$ ,  $p$  – давление,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_0$  – плотность среды, турбулентное число Прандтля  $Pr_t = 0.9$ ,

$\tau_{ij} = -\overline{u_i' u_j'}$  – тензор напряжений Рейнольдса,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\nu_t$  – турбулентная вязкость:

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.47)$$

где  $C_\mu = 0.09$ .

Прогностические уравнения для  $k$  и  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon U_j)}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right], \quad (3.49)$$

где  $P$  и  $G$  — напряжение сдвига и источник плавучести вычисляются соответственно:

$$P_k = \overline{u'_i u'_j}^* \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (3.50)$$

$$G_k = -\beta g \overline{\theta' u'_3}^*, \quad (3.51)$$

где  $C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.89, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.11$ .

В данной подходе использовался модифицированный вариант вычисления компонент тензора рейнольдсовых напряжений и потока тепла, сохраняя при этом классическую форму турбулентной вязкости (3.47):

$$\overline{u'_i u'_j}^* = (1 - Ri_f) \overline{u'_i u'_j} = -(1 - Ri_f) \nu_t S_{ij}, \quad (3.52)$$

$$\overline{\theta' u'_i}^* = (1 - Ri_f) \overline{\theta' u'_i} = -(1 - Ri_f) \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad (3.53)$$

где  $S_{ij} = 0.5(\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i)$ , а локальное число Ричардсона записывается как  $Ri_f = G/P$ .

### 3.7.2. Сравнение динамики конвективных течений над неоднородно нагретой поверхностью при наличии запирающей инверсии и при фиксированной температуре на верхней границе

Таблица 3.3 - Параметры 3D RANS-расчетов

№	Название	$L_x \times L_y \times L_z, \text{ м}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$\frac{Ra_{max} = Pr \beta g \Delta T_{max} L_y^3}{\nu^2}$	Начальный профиль температуры $T(y)$
1	«Inversion»	1000×200×1000	160×160×160	$1.012 \cdot 10^{15}$	$293.15K + \frac{16.85K \cdot y}{200\text{m}}$
2	«Fixed»	1000×110×1000	160×80×160	$1.012 \cdot 10^{15}$	293.15K

Где  $L_i$  – линейный размер области в соответствующем направлении;  $N_i$  – число узлов сетки в соответствующем направлении;  $Ra_{max}$  – число Рэлея, посчитанное по максимальному значению перепада температур.

Исследовать динамику когерентных структур, формирующихся в течении над неоднородно нагретой поверхностью в реалистичной постановке довольно трудно, так как слой инверсии будет прорасти во время нагрева почвы, что сделает картину течения глобально нестационарной.

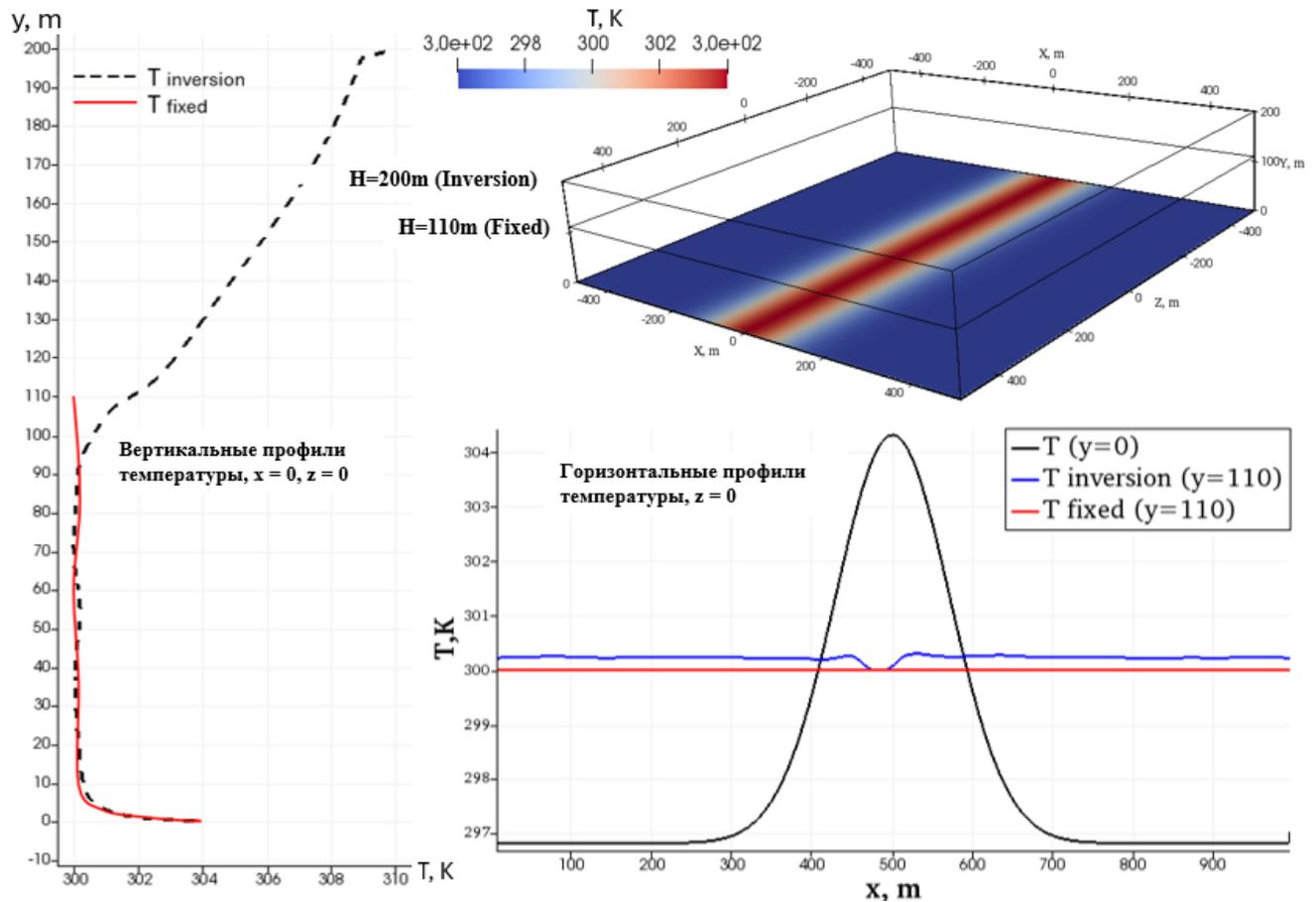


Рисунок 3.9 - Слева: Мгновенные вертикальные профили температуры для развитого течения в центре области ( $x = 0$  м,  $z = 0$  м) для обеих конфигураций расчета. Сверху справа: схема расчетной области и распределение температуры на нижней границе для случая с вертикальной инверсией температуры. Снизу справа: Профили температуры в центральном сечении ( $z = 0$  м) на нижней стенке и на высоте 110 метров для обеих конфигураций в развитом течении.

Было предложено провести сравнение смоделированной динамики конвективных структур, формирующихся в двух подобных течениях. Распределение температуры на подстилающей поверхности было одинаковым, как показано на профилях температуры на Рисунке 3.9. В первом расчете моделировалось течение в условиях с температурной инверсией на высоте 110 м, а во втором

при фиксированной температуре на верхней границе, расположенной на этой же высоте. Температура верхней стенки во втором расчете совпадает со значением средней температуры на соответствующем уровне из первого расчета. Основные параметры расчетов приведены в Таблице 3.3. Исследовалась конфигурация с распределением поля температуры на нижней границе области в виде функции Гаусса в направлении оси  $Ox$ :

$$T(x, t)_{y=0} = 296.8K + 7.5K \cdot \min\left(1, \left(\frac{t}{t_0}\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{(x-0.5L_x)^2}{(0.16L_x)^2}\right), \quad (3.54)$$

где  $L_x$  – размер области в направлении оси  $Ox$ ,  $t_0$  – время нагрева нижней поверхности, имитирующее процесс утреннего перехода.

Расчетная область представляет собой параллелепипед  $1000 \times 200 \times 1000$  м (Рисунок 3.9). Сильная амплитуда инверсии ( $80K/км$ ) была выбрана, чтобы реализовать запирающий эффект, препятствующий дальнейшему прорастанию слоя смешения, и создать квазистационарную картину циркуляционного течения в слое, ограниченном сверху слоем температурной инверсии.

Вторая конфигурация расчета отличается от первой вертикальным размером области  $1000 \times 110 \times 1000$  м, отсутствием начальной инверсии температуры и фиксированной температурой верхней стенки равной  $300$  К (Рисунок 3.9). Такие условия были выбраны по результатам первого расчета, чтобы более точно повторить конфигурацию течения и сравнить формирующиеся структуры в одинаковом масштабе. Высота  $110$  метров также была выбрана по результатам расчета с инверсией температуры, как установившаяся высота слоя смешения, температура была выбрана равной температуре в слое инверсии на соответствующей высоте. На верхней стенке задавались условия проскальзывания на скорость. Профили температуры в центральном сечении ( $z = 0$  м) на нижней стенке и на высоте  $110$  метров для обеих конфигураций в развитом течении приведены на Рисунке 3.9. Вертикальные профили температуры для развитого течения в центре области ( $x = 0$  м,  $z = 0$  м) для обеих конфигураций расчета приведены на Рисунке 3.9 (слева).

Предполагается, что если такое сравнение покажет, что течения со стенкой и свободной границей качественно имеют схожую структуру, то можно будет исследовать различные конфигурации в более простой постановке с наличием стенки, а результаты таких исследований могут быть качественно применимы к процессам, формирующимся в похожих условиях в атмосферном пограничном слое.

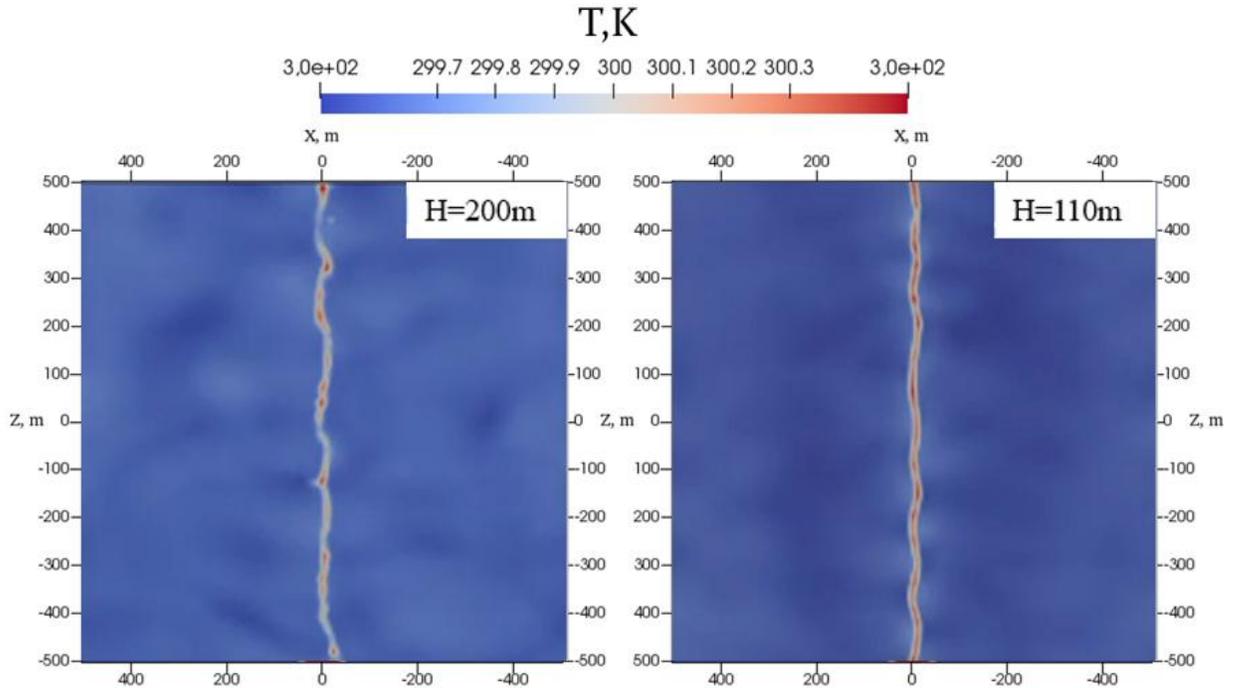
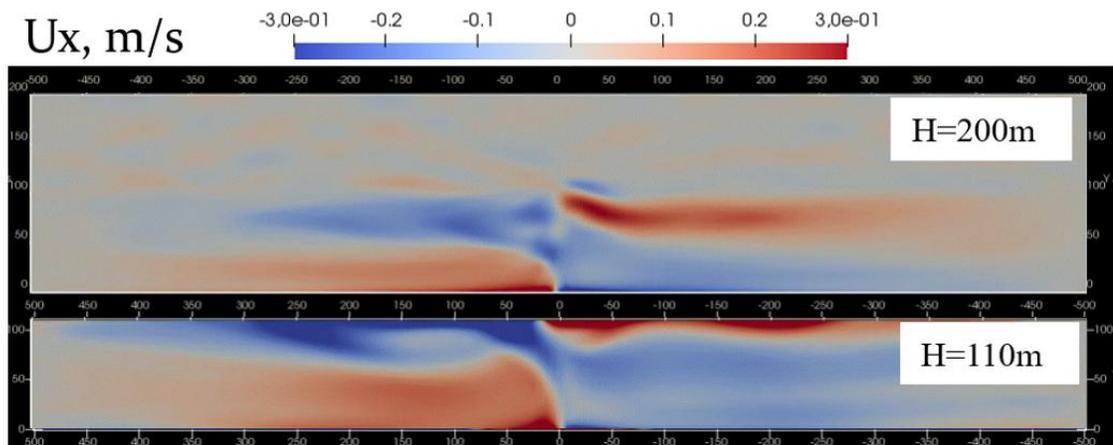


Рисунок 3.10 - Мгновенные поля температуры в горизонтальном сечении на высоте  $0.2 L_y$  для двух конфигураций расчета: с температурной инверсией (слева) и стенкой с фиксированной температурой (справа)

Взаимное сравнение результатов моделирования для двух конфигураций приведено на Рисунках 3.10–3.13. По распределению температуры в горизонтальных сечениях на высоте  $0.2 L_y$  на Рисунке 3.10 видно, что в обоих случаях наблюдается слабые колебания потока с длиной волны порядка 100 метров, что сопоставимо с вертикальным размером горизонтальных циркуляций.



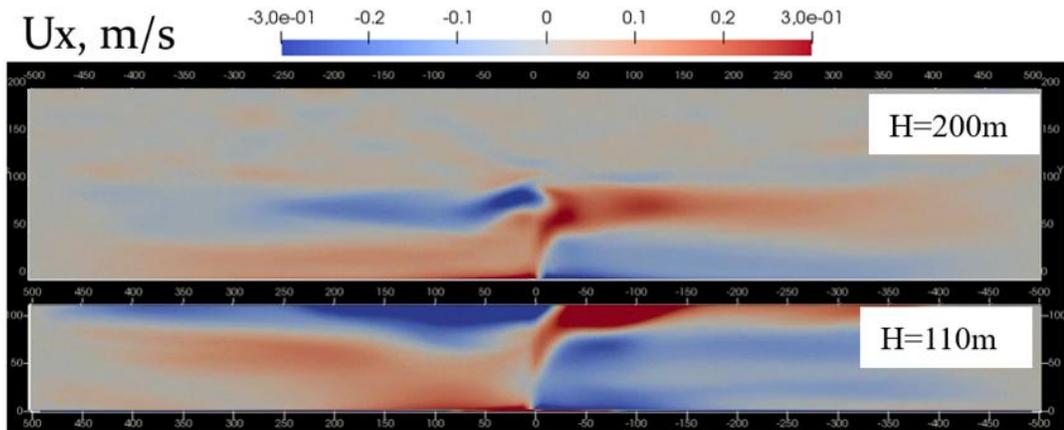


Рисунок 3.11 - Мгновенные поля  $x$ -компоненты скорости для двух моментов времени в вертикальном сечении  $z = 0$  для двух конфигураций расчета: с температурной инверсией (сверху) и стенкой с фиксированной температурой (снизу)

Мгновенные поля  $x$ -компоненты скорости (Рисунок 3.11) для двух моментов времени в вертикальном сечении  $z = 0$  м для обеих конфигураций расчета демонстрирует периодическое перезамыкание противоположных частей циркуляций, что отражает наличие колебательного процесса в потоке. Также можно отметить, что структуры горизонтальных циркуляций по обе стороны от центра области имеют схожую динамику и интенсивность.

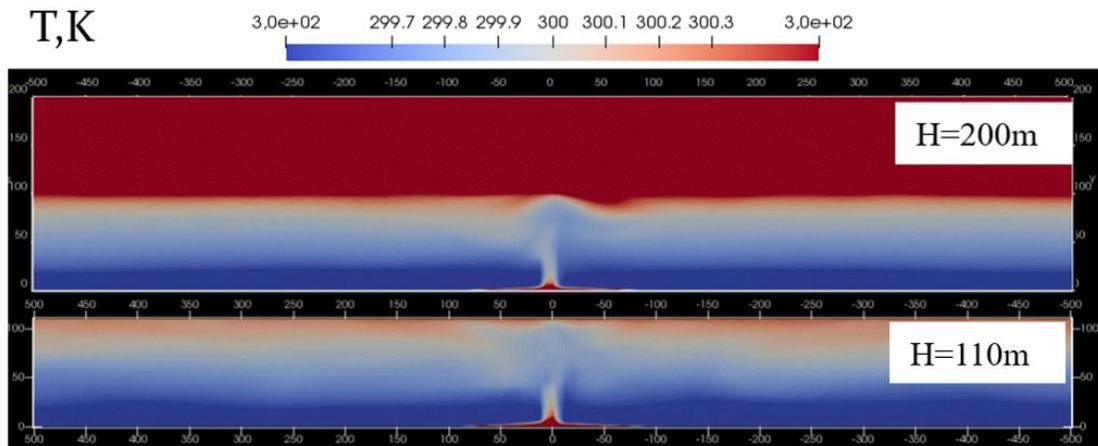


Рисунок 3.12 - Мгновенные поля температуры в вертикальном сечении  $z = 0$  м для двух конфигураций расчета: с температурной инверсией (сверху) и стенкой с фиксированной температурой (снизу)

Мгновенные поля температуры в вертикальном сечении  $z = 0$  м для двух конфигураций расчета (Рисунок 3.12) показывают наличие восходящего потока схожей интенсивности в обоих случаях. Также можно отметить, что в среднем вертикальный профиль температуры по всей ширине

расчетной области имеет практически одинаковую форму, при том, что в случае с температурной инверсией слой смешения имеет свободную границу сверху.

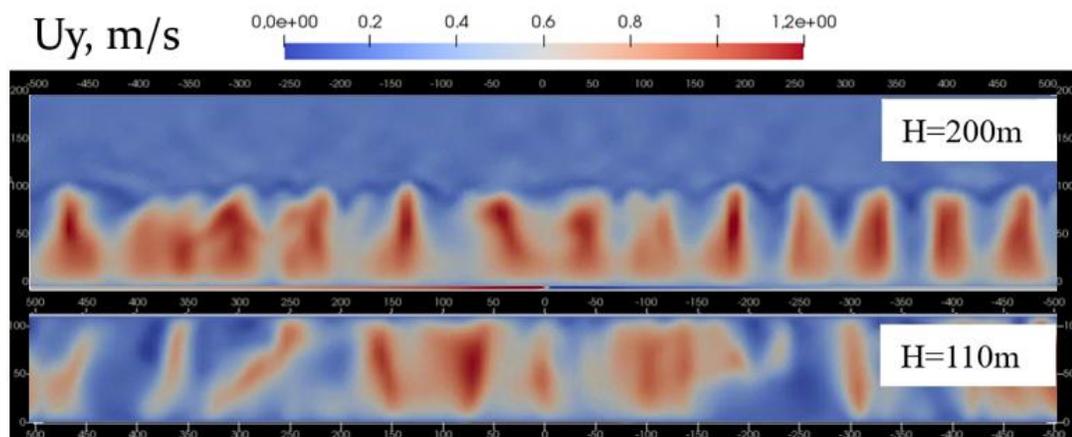


Рисунок 3.13 - Мгновенные поля у-компоненты скорости в вертикальном сечении  $x = 0$  м (вдоль источника нагрева) для двух конфигураций расчета: с температурной инверсией (сверху) и стенкой с фиксированной температурой (снизу)

По распределению у-компоненты (вертикальной) скорости (Рисунок 3.13) в центральном сечении при  $x = 0$  м вдоль источника нагрева видно, что в обоих случаях формируются аналогичные периодические структуры, с чередующимся знаком.

По результатам взаимного сравнения течений, образующихся над неоднородно нагретой поверхностью, при наличии температурной инверсии и при наличии стенки можно сделать вывод, что течения имеют очень схожую структуру, и выводы, сделанные об исследовании природы осцилляций положения восходящего потока в течении со стенкой, могут в какой-то степени быть применимы к реальным течениям в конвективном пограничном слое, когда течение ограничено сверху слоем температурной инверсии.

### 3.7.3. Исследование динамики конвективных течений над неоднородно нагретой поверхностью при изменении вертикального размера области

Таблица 3.4 - Параметры 3D RANS-расчетов

№	$L_x \times L_y \times L_z, \text{ м}$	$N_x \times N_y \times N_z$	$Ra_{max} = \frac{Pr\beta g \Delta T_{max} L_y^3}{\nu^2}$	$Ra_{mean} = \frac{Pr\beta g \Delta T_{mean} L_y^3}{\nu^2}$
1	1000×55×1000	160×40×160	$6.3 \times 10^{13}$	$3.4 \times 10^{13}$

2	1000×110×1000	160×80×160	$5.03 \times 10^{14}$	$2.7 \times 10^{14}$
3	1000×220×1000	160×160×160	$4.3 \times 10^{15}$	$2.2 \times 10^{15}$

Переход к течению между стенками позволяет уйти от ограничений на величину вертикального градиента температуры, размывающего слой инверсии, и исследовать конфигурации с большей разницей температур. При наличии вертикального градиента одного знака на всей ширине области осцилляции будут интенсивнее, что позволит изучить их природу более детально.

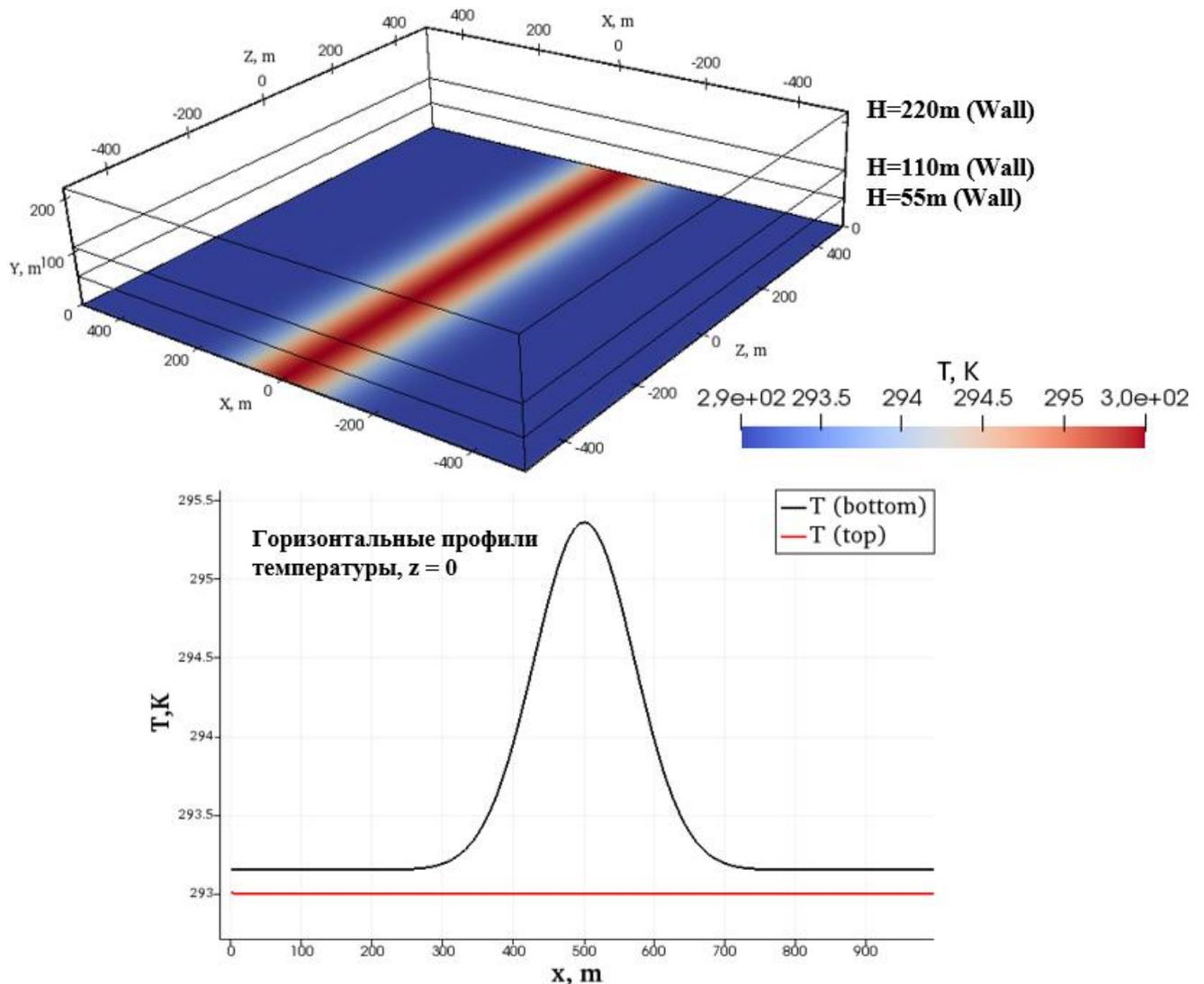


Рисунок 3.14 - Сверху: схема расчетной области и распределение температуры на нижней границе для трех различных высот расчетной области. Снизу: Профили температуры в центральном сечении ( $z = 0$  м) на верхней и нижней стенках.

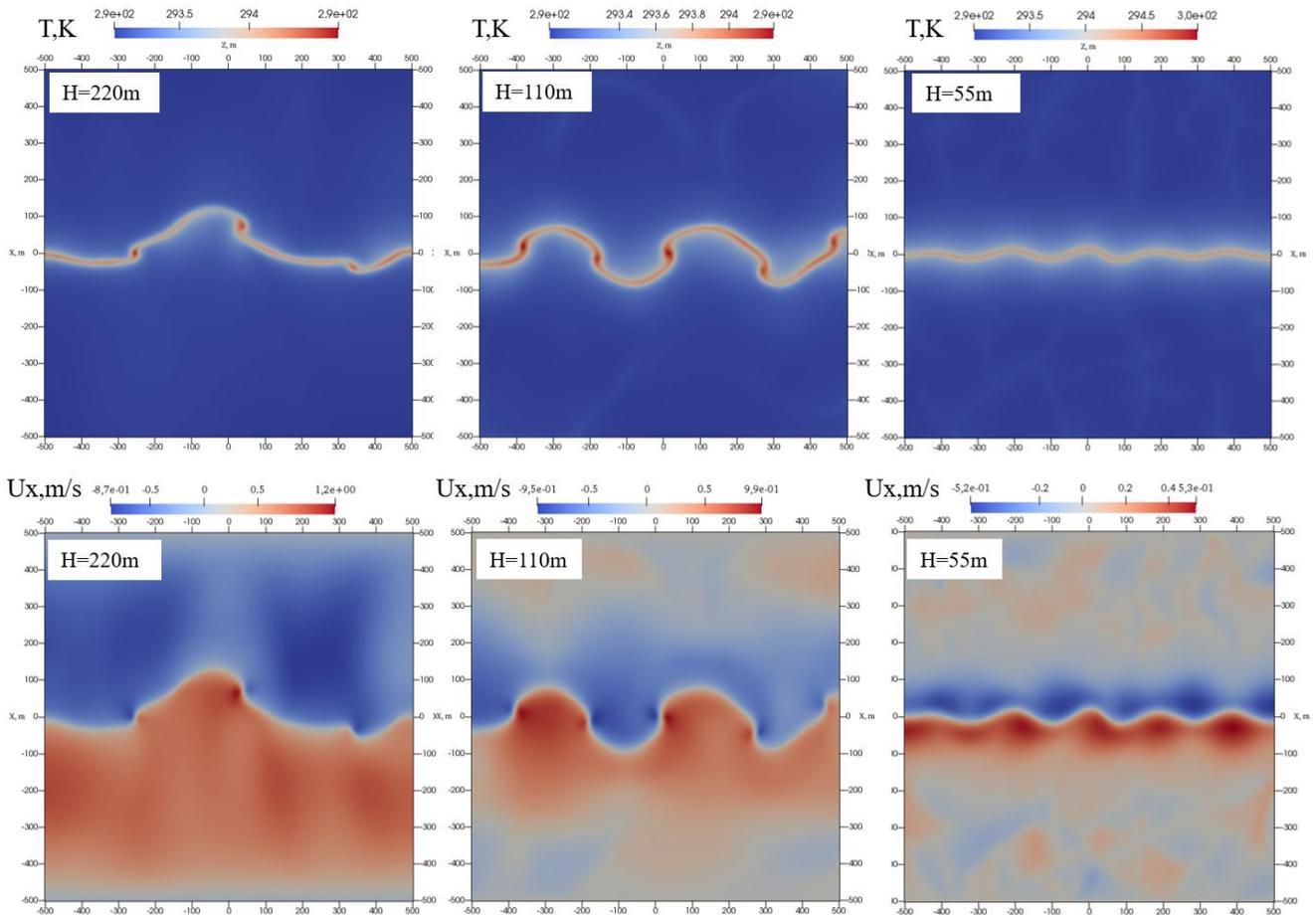
Было предложено исследовать динамику конвективных структур, формирующихся в течении над неоднородно нагретой поверхностью, при изменении вертикального размера области. Исследовались 3 конфигурации с высотой области 55, 110 и 220 метров. Схема расчетной области и распределение температуры на нижней границе для трех различных высот расчетной области приведено на Рисунке 3.14 (сверху). Профили температуры в центральном сечении ( $z = 0$  м) на верхней и нижней стенках приведено на Рисунке 3.14 (снизу). Другие параметры расчетов приведены в Таблице 3.4.

Как и в предыдущей части исследования, рассматривалась конфигурация с распределением поля температуры на нижней границе области в виде функции Гаусса в направлении оси  $Ox$ :

$$T(x, t)_{bottom} = 293.15K + 3.75K \cdot \min\left(1, \left(\frac{t}{t_0}\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{(x - 0.5L_x)^2}{(0.16L_x)^2}\right) \quad (3.54)$$

$$T_{top} = 293K \quad (3.55)$$

, где  $L_x$  – размер области в направлении оси  $Ox$ ,  $t_0$  – время нагрева нижней поверхности. В данных расчетах разница температур верхней и нижней стенки была отрицательной на всей ширине области.



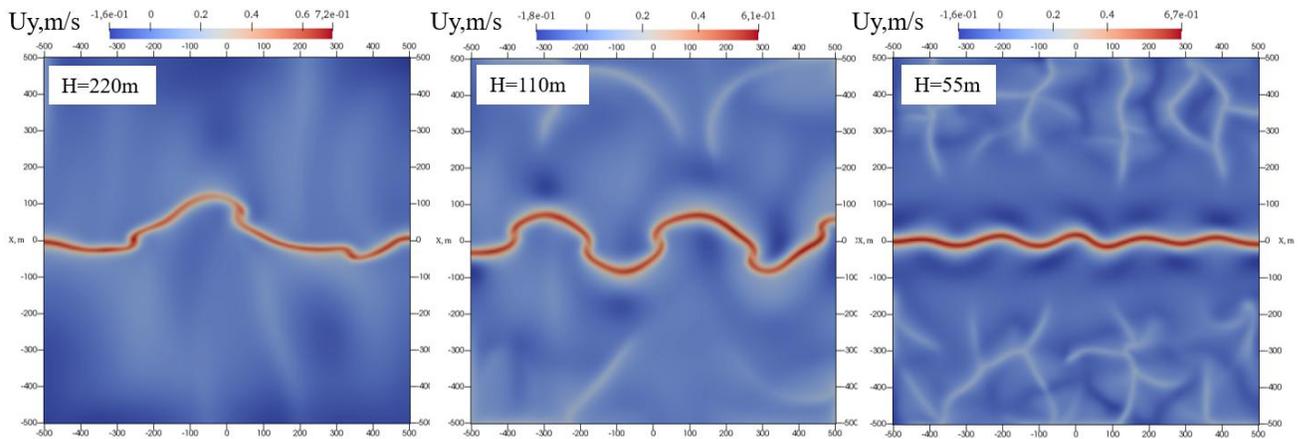


Рисунок 3.15 - Мгновенные поля температуры (сверху),  $x$ -компоненты (по центру) и  $y$ -компоненты (снизу) скорости в горизонтальном сечении на высоте  $0.2 L_y$  для трех различных высот расчетной области

Мгновенные поля температуры в горизонтальном сечении на высоте  $0.2 L_y$  (Рисунок 3.15) показывают наличие колебательного процесса в области над источником тепла. С увеличением высоты расчетной области происходит пропорциональное увеличение пространственного периода колебаний. Такое поведение обусловлено тем, что размер ячеек Бенара связан с вертикальным размером области, а колебания напрямую связаны со взаимодействием конвективных ячеек (валов) по обе стороны от источника нагрева. Также можно отметить, что интенсивность колебаний значительно выше, чем в предыдущем разделе (часть 3.7.2). Это связано с граничными условиями на температуру. В предыдущем разделе средняя температура на нижней границе совпадала с температурой на верхней границе, такое условие обеспечивало постоянную высоту слоя смешения и препятствовало последующему прорастанию. Максимальный вертикальный перепад температур в том случае равнялся 4 К, а горизонтальный 7 К. В таком случае вклад от горизонтальных циркуляций был доминирующим, что приводило к более сильному подавлению колебаний. В текущем исследовании максимальный вертикальный и горизонтальный перепады температур практически совпадают и равны 4 К. При таком условии наблюдается выраженный эффект взаимодействия циркуляционных течений, образующихся за счет горизонтального градиента, и ячеек Бенара, формирующихся за счет вертикального.

Распределения  $x$ -компоненты (поперечной источнику) и  $y$ -компоненты (вертикальной) скорости на Рисунке 3.15 показывают наличие формирующихся ячеек Бенара на некотором расстоянии от источника нагрева. Результаты показывают, что при такой амплитуде горизонтального градиента, циркуляции по обе стороны от источника при взаимодействии между собой перезамыкаются, формируя устойчивые осциллирующий поток в горизонтальной плоскости.

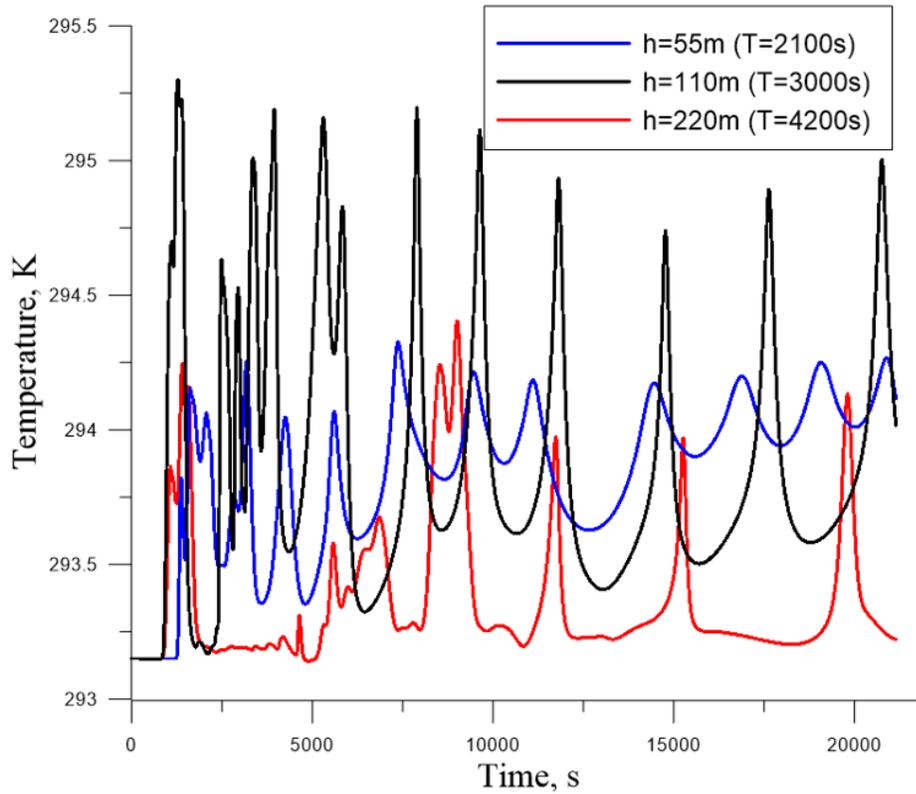


Рисунок 3.16 – Временная эволюция температуры в точке  $x = 0$  м,  $y = 0.2 L_y$ ,  $x = 0$  м для трех различных высот расчетной области

На Рисунке 3.16 приведена эволюция значения температуры в центральной точке на высоте  $0.2 L_y$  от нижней границы для трех высот расчетной области. Данное распределение позволяет оценить временной период данных осцилляций.

Таблица 3.5 - Параметры 3D RANS-расчетов и характеристики осцилляций потока

№	$L_x \times L_y \times L_z, \text{ м}$	$Ra_{max} = \frac{Pr\beta g \Delta T_{max} L_y^3}{\nu^2}$	$Ra_{mean} = \frac{Pr\beta g \Delta T_{mean} L_y^3}{\nu^2}$	$\lambda, \text{ м}$	$T, \text{ с}$
1	1000×55×1000	$6.3 \times 10^{13}$	$3.4 \times 10^{13}$	220	2100
2	1000×110×1000	$5.03 \times 10^{14}$	$2.7 \times 10^{14}$	425	3000
3	1000×220×1000	$4.3 \times 10^{15}$	$2.2 \times 10^{15}$	735	4200

В Таблице 3.5 приведены посчитанные средние значения длин волн и периода колебаний в установившемся течении для трех высот расчетной области.

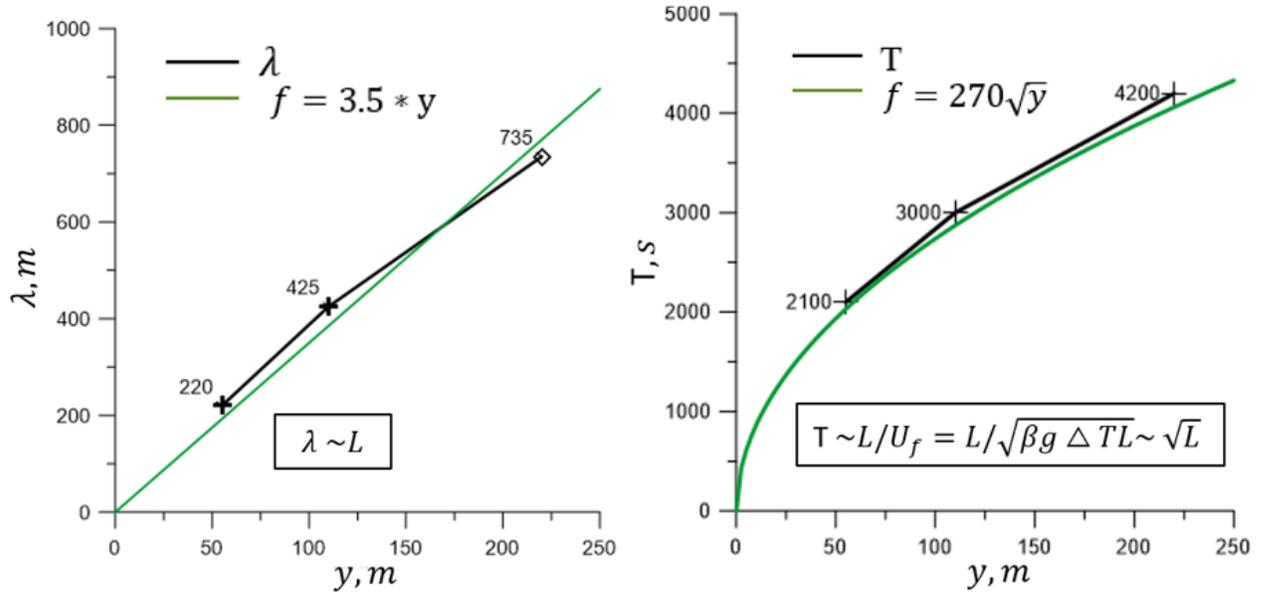


Рисунок 3.17 - Графики зависимости длины волны (слева) и периода колебаний (справа) от высоты канала

По полученным данным были построены графики зависимости длины волны и периода колебаний от высоты канала. Было получено, что пространственный масштаб линейно зависит от высоты канала (Рисунок 3.17, слева). Период колебаний имеет нелинейную зависимость от высоты канала, как показано на Рисунке 3.17 (справа). Предполагается, что период колебаний может определяться скоростью «свободного падения», которая определяет скорость движения жидкости, когда сила плавучести находится в равновесии с вязкими силами:

$$U_f = \sqrt{\beta g \Delta T L} \quad (3.56)$$

Можно оценить характерный масштаб времени в потоке через отношение высоты области к скорости «свободного падения»:

$$T \sim L/U_f = L/\sqrt{\beta g \Delta T L} \sim \sqrt{L/\Delta T} \quad (3.57)$$

Из формулы (3.57) видно, что характерное время, за которое жидкость поднимается от нижней границы области к верхней прямо пропорционально корню из высоты и обратно пропорционально корню из разницы температур на стенках. Так как разница температур во всех трех случаях одинакова, то характерное время подъема жидкости определяется только вертикальным размером области. Если построить график зависимости корня из высоты канала, то видно, что с некоторым коэффициентом данный график довольно хорошо совпадает с графиком зависимости реального периода колебаний в потоке от высоты канала.

### 3.8. Сравнение результатов DNS и RANS исследований динамики конвективных течений

Как было показано в этой и предыдущей главе, в конвективных течениях над линейно-симметричной температурной неоднородностью при определенных соотношениях между вертикальным и горизонтальными температурными градиентами могут формироваться устойчивые колебания положения восходящего потока как при числах Рэля  $10^5 - 10^7$  (DNS расчеты, Глава 2), так и при числах Рэля  $10^{13} - 10^{15}$  (RANS расчеты, текущая глава). Было интересно сопоставить результаты этих исследований и проверить, насколько хорошо согласуются параметры колебаний, исследованных в данной главе, с асимптотической оценкой периода колебаний (Уравнение 2.13), предложенной в Главе 2. Такое сравнение справедливо проводить, так как асимптотическая оценка связывает изменение периода с изменением числа Рэля при фиксированном числе Прандтля, а числа Прандтля DNS, и в RANS расчетах были близки (1 и 0.71 соответственно).

Для сравнения возьмем по одной конфигурации из каждого исследования, где соотношение вертикального размера области к горизонтальному было похожим и равнялось  $\sim 1/10$ . В DNS исследовании число Рэля равнялось  $5.8 \times 10^5$ , вертикальный размер области  $L_{DNS}$  равнялся 0.25 м, наблюдаемое значение скорости циркуляции  $U_{obs\_DNS}$  равнялось 0.12 м/с, а период колебания  $T_{obs\_DNS}$  равнялся 16 с. В RANS исследовании число Рэля равнялось  $5.03 \times 10^{14}$ , вертикальный размер области  $L_{RANS}$  равнялся 110 м, наблюдаемое значение скорости циркуляции  $U_{obs\_RANS}$  равнялось 1 м/с, а период колебания  $T_{RANS}$  равнялся 3000 с. Можно оценить характерный масштаб времени, через высоту и наблюдаемые значения скорости циркуляций:

$$T_{U_{obs\_DNS}} = \frac{L}{U_{obs\_DNS}} = \frac{0.25\text{м}}{0.12\text{м/с}} \approx 2 \text{ с} \quad (3.58)$$

$$T_{U_{obs\_RANS}} = \frac{L}{U_{obs\_RANS}} = \frac{110\text{м}}{1 \text{ м/с}} \approx 110 \text{ с} \quad (3.59)$$

Также для обоих случаев можно оценить скорость свободного падения:

$$U_{f\_DNS} = \sqrt{\beta g \Delta T L} = \sqrt{1.5\text{м/с}^2 \cdot 0.25 \text{ м}} \approx 0.6 \text{ м/с} \quad (3.60)$$

$$U_{f\_RANS} = \sqrt{\beta g \Delta T L} = \sqrt{9.81 \text{ м/с}^2 \cdot 3.3 \times 10^{-3} \text{ К}^{-1} \cdot 3.75\text{К} \cdot 110 \text{ м}} \approx 3.5 \text{ м/с} \quad (3.61)$$

и характерный масштаб времени, через высоту областей и скорость свободного падения:

$$T_{U_{f\_DNS}} = \frac{L}{U_{f\_DNS}} = \frac{0.25\text{м}}{0.6 \text{ м/с}} \approx 0.4 \text{ с} \quad (3.62)$$

$$T_{U_{f\_RANS}} = \frac{L}{U_{f\_RANS}} = \frac{110\text{м}}{3.5 \text{ м/с}} \approx 30 \text{ с} \quad (3.63)$$

Далее, используя асимптотическую оценку для периода колебаний (2.13), можно вычислить оценки периодов колебаний для обоих случаев:

$$T_{est\_DNS} = 15.9 \text{ с} \quad (3.64)$$

$$T_{est\_RANS} = 22 \left( \frac{L}{2U_{max}} - \sqrt[3]{\frac{10 \nu}{\Delta b_{max}^2}} \right) \quad (3.65)$$

$$= 22 \left( \frac{110 \text{ м}}{2 \cdot 1 \text{ м/с}} - \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}}{(9.81 \text{ м/с}^2 \cdot 3.3 \times 10^{-3} \text{ К}^{-1} \cdot 3.75 \text{ К})^2}} \right) \approx 1200 \text{ с}$$

Наблюдаемые периоды колебаний, согласуются с оценкой и с характерными масштабами времен следующим образом:

$$T_{obs\_DNS} \approx 16 \text{ с} = 40 \cdot T_{U_f\_DNS} = 8 \cdot T_{U_{obs\_DNS}} \approx T_{est\_DNS} \quad (3.66)$$

$$T_{obs\_RANS} \approx 3000 \text{ с} = 100 \cdot U_{f\_RANS} = 27 \cdot T_{U_{obs\_RANS}} = 2.5 \cdot T_{est\_RANS} \quad (3.67)$$

Из результатов видно, что посчитанное значение периода колебаний в RANS расчетах, с использованием выведенной для DNS расчетов асимптотической оценки, отличается от реального значения в 2.5 раза, что является довольно хорошим согласием, при условии, что числа Рэлея отличаются в  $10^9$  раз. Такое расхождение может быть вызвано как различием в подходах в моделированию и влиянием граничных условий, так и в небольшими различиями между отношениями вертикального и горизонтального температурных градиентов на границах.

### 3.9. Выводы

Была предложена модификация стандартной  $k - \varepsilon$  модели с измененной параметризацией компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентного теплового потока и соответствующим набором пристенных функций. Модификация учитывает эффекты плавучести, используя локальное число Ричардсона в качестве параметра усиления/затухания вертикальных потоков импульса и тепла. Модель протестирована на данных атмосферных наблюдений и показала лучшую способность к восстановлению потоков тепла и импульса по сравнению со стандартной  $k - \varepsilon$  моделью.

По сравнению с другими модификациями  $k - \epsilon$  модели с поправками на плавучесть предложенная модель показывает более высокую чувствительность к условиям локальной устойчивости из-за отсутствия компенсационных эффектов на турбулентную вязкость.

Предложенный упрощенный одноячеечный подход перспективен в плане разработки новых пристенных функций с поправкой на устойчивость для более правильного представления потоков тепла и импульса.

Предложенная модификация  $k - \epsilon$  модели была реализована в расчетном модуле OpenFOAM. Была проведена серия RANS расчетов с использованием предложенной модели с целью исследования эффекта возникновения осцилляций течения над линейно-симметричным источником тепла при больших числах Рэлея  $10^{13} - 10^{15}$ . Было обнаружено, что при определенном соотношении между вертикальным и горизонтальным градиентами температуры, так же как в DNS-расчетах главы 2, образуются осцилляции положения восходящего потока. Было показано, что с ростом высоты расчетной области пространственный период колебаний увеличивается линейно. Также было показано, что зависимость временного периода колебаний от высоты канала определяется степенной функцией с показателем степени равным 0.5. Также было проведено сравнение результатов DNS расчетов из Главы 2 и RANS расчетов из текущей главы и было показано, что асимптотическая оценка периода колебаний, предложенная в Главе 2 на основе расчетов для Рэлея  $10^5 - 10^7$ , достаточно хорошо предсказывает период колебаний для подобного течения при числах Рэлея  $10^{13} - 10^{15}$ .

#### **Глава 4. Исследование совместного влияния поверхностного температурного градиента и поверхностного сдвига на структуру АПС**

В предыдущих главах исследовалось влияние неоднородного распределения температуры на свободно конвективные течения, однако в природе, наличие реки создает не только температурную неоднородность, а также поверхностный сдвиг, обусловленный течением реки. Эффект течения реки на первый взгляд может показаться слабым из-за малых скоростей движения воды (около 1–2 м / с). В условиях слабого ветра и ясного неба ночного атмосферного пограничного слоя формируется устойчивая стратификация за счет быстрого радиационного охлаждения грунта. Устойчивая стратификация подавляет восходящие потоки за счет отрицательной плавучести, и течение приобретает квази-двумерный характер. В таких условиях движение подстилающей поверхности может играть важную роль. Слабый сдвиг, создаваемый движением поверхности воды, может приводить к накоплению горизонтальной компоненты импульса в узком слое над рекой. В

результате, такой эффект способен модулировать динамику конвективных восходящих потоков, создаваемых плавучестью над нагретой поверхностью воды. До настоящего времени эффект течения реки на динамику атмосферного пограничного слоя в условиях устойчивой стратификации не был достаточно изучен.

В данной главе представлено исследование взаимодействия поверхностного температурного градиента с поверхностным сдвигом в устойчиво-стратифицированных условиях с помощью моделирования методом крупных вихрей с высоким разрешением. Для изучения вклада каждого эффекта реки на АПС по отдельности была проведена серия расчетов с различными граничными условиями. Для определения эффекта течения реки при наличии конвекции были смоделированы два случая: с неподвижной и движущейся рекой в идеализированной постановке (в качестве реки был выбран линейный протяженный участок с повышенной относительно окружающей поверхности температурой), когда температура реки была выше, чем температура окружающего воздуха. Также, для определения эффекта взаимодействия сдвига и свободной конвекции были смоделированы два случая с течением реки, когда температура реки выше температуры окружающего воздуха (положительная плавучесть) и равна ей (нейтральная плавучесть).

Стоит отметить, что в большинстве своем реки имеют извилистую форму. Изгибы рек могут вносить дополнительные эффекты в конвективный теплоперенос над ними. В областях максимальной кривизны такие эффекты приводят к формированию перпендикулярных реке горизонтальных течений, а в местах перегибов способны формировать крупномасштабные долгоживущие вертикальные вихревые пары. С целью изучения влияния изгибов реки был проведен расчет суточной эволюции пограничного слоя в реалистичном масштабе для участка реки Енисей. Для данного расчета был выбран участок размером 10x10 км в окрестностях города Красноярска содержащий в себе последовательные изгибы различной кривизны в русле реки.

#### **4.1. Описание используемой модели и особенностей расчетного кода.**

Расчеты проводились методом крупных вихрей (LES) с эффектами переменной плотности в неупругом приближении. Численные расчеты проводились с помощью открытого программного кода MicroHH 1.0 ([www.microhh.org](http://www.microhh.org)), используемого для расчетов конвективных течений [85]. Разрешались отфильтрованные на масштабе сетки уравнения Навье – Стокса ( $\nu=1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$  и  $Pr = 0,71$ ) и уравнения переноса тепла и влаги (в форме 4.2):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} + \delta_{i3} \beta g \bar{\theta} \left( 1 - \left[ 1 - \frac{R_{vapor}}{R_{dry}} \right] q_t \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 \bar{\varphi} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0 \tau_{\varphi j}}{\partial x_j} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho_0 \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (4.3)$$

$$\tau_{ij} = -2\nu_{sgs} \bar{S}_{ij} \quad (4.4)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.5)$$

$$\tau_{\varphi j} = -\frac{\nu_{sgs}}{Pr_t} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \quad (4.6)$$

$$\nu_{sgs} = \lambda^2 \bar{S} \left( 1 - \frac{Ri_f}{0.3} \right)^{0.5} \quad (4.7)$$

$$\bar{S} = (2\bar{S}_{ij} \cdot \bar{S}_{ij})^{0.5} \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(kz)^2} + \frac{1}{(c_s \Delta)^2} \quad (4.9)$$

, где  $u$  – скорость,  $\varphi$  – скаляры ( $\theta$  – потенциальная температура для сухого воздуха,  $q_t$  – полная концентрация водяного пара),  $\rho_0$  – опорный профиль плотности,  $k$  – постоянная Кармана (0.4),  $\beta$  – коэффициент теплового расширения ( $3.38 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ),  $c_s$  – константа Смагоринского (0.12),  $Ri_f$  – локальное градиентное число Ричардсона,  $R_{dry}$  и  $R_{vapor}$  – газовые константы для сухого воздуха и водяного пара,  $\Delta$  – масштаб ячейки расчетной сетки.

Для замыкания уравнений LES использовалась модель Смагоринского (4.4), модифицированная для учета устойчивой стратификации. В уравнении на подсеточную вязкость (4.7) добавлен множитель с локальным числом Ричардсона, такая поправка обусловлена различием между масштабами диссипации, и длиной смешения при наличии сил плавучести [85]. Масштаб  $\lambda$ , входящий в выражение для подсеточной вязкости (4.7) также был модифицирован (4.9) в соответствии с теорией Монины – Обухова [61] таким образом, чтобы обеспечить корректный закон спада величины подсеточной вязкости вблизи поверхности.

На боковых границах расчетной области задавались периодические условия, а на верхней границе условие свободного скольжения. В подсеточной модели был учтен локальный масштаб стратификации (длина смешения). Геострофические эффекты в данных расчетах не учитывались,

чтобы изолировать эффекты свободной конвекции и сдвига. Переход от устойчивой к неустойчивой модели определяется знаком длины Мони́на – Обухова в точке. Данный код был многократно предварительно протестирован на различных канонических конфигурациях, а также верифицирован на результатах классических атмосферных экспериментов [81].

Влажность оказывала влияние на силу плавучести, что отражено в выражении (4.1), рассматривались небольшие концентрации водяного пара, недостаточные для фазового перехода. Для моделирования испарения с поверхности реки на поверхности реки была установлена постоянная концентрация пара равная концентрации насыщения для заданной температуры поверхности реки.

Для изучения вклада каждого эффекта реки на АПС по отдельности была проведена серия расчетов с различными граничными условиями. Для определения эффекта течения реки при наличии конвекции были смоделированы два случая: с неподвижной и движущейся рекой в идеализированной постановке (в качестве реки был выбран линейный протяженный участок с повышенной относительно окружающей поверхности температурой), когда температура реки была выше, чем температура окружающего воздуха. Также для определения эффекта воздействия сдвига был смоделирован случай с течением реки, когда температура реки равнялась температуре окружающего воздуха.

#### 4.2. Моделирование профиля скорости реки

Для получения поля скорости на поверхности реки был использован дополнительный код, разрешающий осредненные по глубине уравнения Рейнольдса (со стандартной  $k - \varepsilon$  моделью). Был реализован алгоритм, предложенный в работе [112], позволяющий рассчитать течение в одномерном приближении, то есть, считая реку прямой. В таком случае вычислялись осредненные вдоль продольного направления поля скоростей. Математическая модель строится на основе стационарных, осредненных по глубине уравнений Рейнольдса для вязкой жидкости. При этом предполагается, что распределение давления является гидростатическим и характеристики потока слабо меняются по глубине (за исключением пристенной области). Для одномерной задачи математическая модель включает уравнение движения:

$$-gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (h \overline{\tau_{xy}})}{\partial y} + \frac{(\tau_{xz})_s - (\tau_{xz})_b}{\rho} = 0 \quad (4.10)$$

Здесь  $h(x, y)$  – глубина,  $\bar{u}(x, y)$  – осредненные по глубине значения компонент вектора скорости,  $z_b(x, y)$  – рельеф дна;  $\rho$  – плотность воды,  $g$  – ускорение свободного падения;  $\overline{\tau_{xy}} = \overline{\tau_{yx}}$  – осредненные по глубине компоненты тензора вязких напряжений и напряжений Рейнольдса;  $(\tau_{xz})_s$ ,  $(\tau_{xz})_b$ ,  $(\tau_{yz})_s$ ,  $(\tau_{yz})_b$  – трение на поверхности реки и ее дне, соответственно. Неизвестные значения  $\overline{\tau_{xy}}$  и  $\overline{\tau_{yx}}$  рассчитываются, используя одномерный аналог модели Буссинеска:

$$\frac{1}{\rho} \overline{\tau_{xy}} = (\nu + \bar{\nu}_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} \quad (4.11)$$

, где  $\nu$  – кинематическая вязкость воды. Турбулентная вязкость  $\bar{\nu}_t$  и кинетическая энергия турбулентности  $\bar{k}$  находятся с использованием осредненной по глубине версии  $k - \varepsilon$  модели:

$$\bar{\nu}_t = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( h \left( \nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right) + (P_h + P_{kv} - \bar{\varepsilon}) h = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( h \left( \nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right) + \left( C_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} P_h + P_{\varepsilon v} - C_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \right) h = 0 \quad (4.14)$$

Здесь  $\bar{k}(x, y)$  – осредненная по глубине кинетическая энергия турбулентности;  $\bar{\varepsilon}(x, y)$  – осредненная по глубине диссипация кинетической энергии; константы были взяты из работы [112].

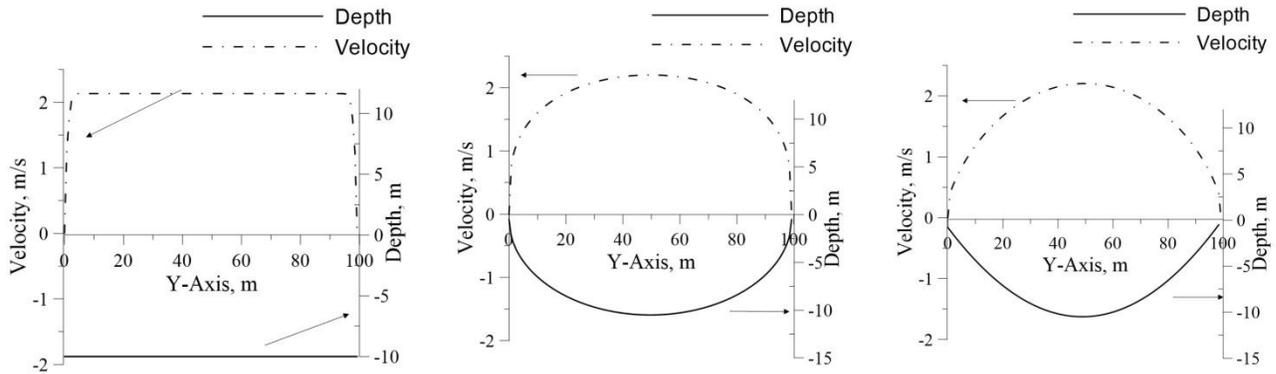


Рисунок 4.1 - Поля скоростей для прямой (сверху слева), параболической (сверху справа), и эллиптической (снизу слева) форм дна рек и рассчитанной для них профиль продольной компоненты скорости на поверхности

Используя разработанный программный код, были посчитаны профили скорости на поверхности реки для различных классических профилей (прямой, параболический и эллиптический) распределения глубины, представленные на Рисунке 4.1.

### 4.3. Моделирование воздействия течения реки в устойчивой стратификации

На первом этапе моделировалось взаимодействие реки с устойчиво-стратифицированной атмосферой при условии, что температура нижней поверхности равнялась температуре реки и равнялась 20 °С. На нижней границе расчетной области задавалась идеализированная прямая река шириной 100 м. Расчетная область имела размеры 1000x1000x100 м с разрешением 1024\*1024\*128. По вертикали задавалась температурная инверсия 5 °С/км.

Расчетная ячейка сетки вблизи поверхности имела размеры 0.8\*0.8\*0.1 метра, а максимальный размер ячейки равнялся 0.8\*0.8\*1.5 метра, что является достаточно хорошим разрешением для LES расчета для данной амплитуды стратификации, согласно [86].

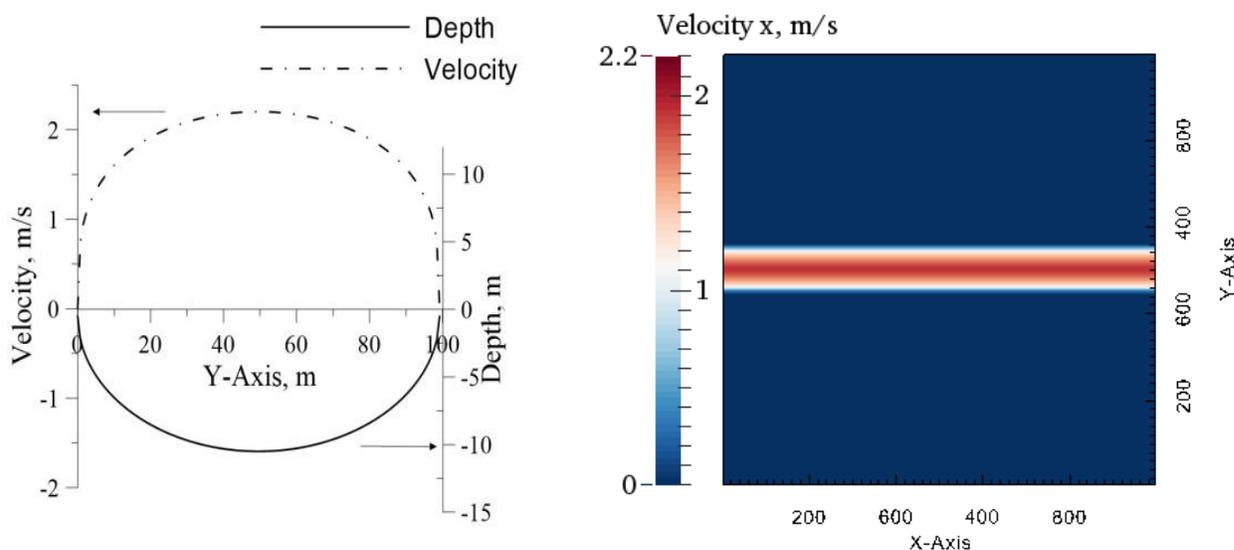


Рисунок 4.2 - Профили дна реки и рассчитанной для него продольной компоненты скорости на поверхности (слева), распределение продольной компоненты скорости на нижней границе расчетной области (справа)

В предварительных двумерных расчетах, описанных в предыдущем разделе, были получены поля скоростей, которые задавались в качестве граничных условий на горизонтальную скорость на нижней стенке в LES расчетах (Рисунок 4.2). Была использована эллиптическая форма дна, с максимальной глубиной 10 м. Максимальная скорость в центре реки составляла 2 м/с. В воздухе в начальный момент скорость была равна нулю. Исследовался процесс переноса импульса от реки в воздух, без наличия тепловой неоднородности на поверхности реки.

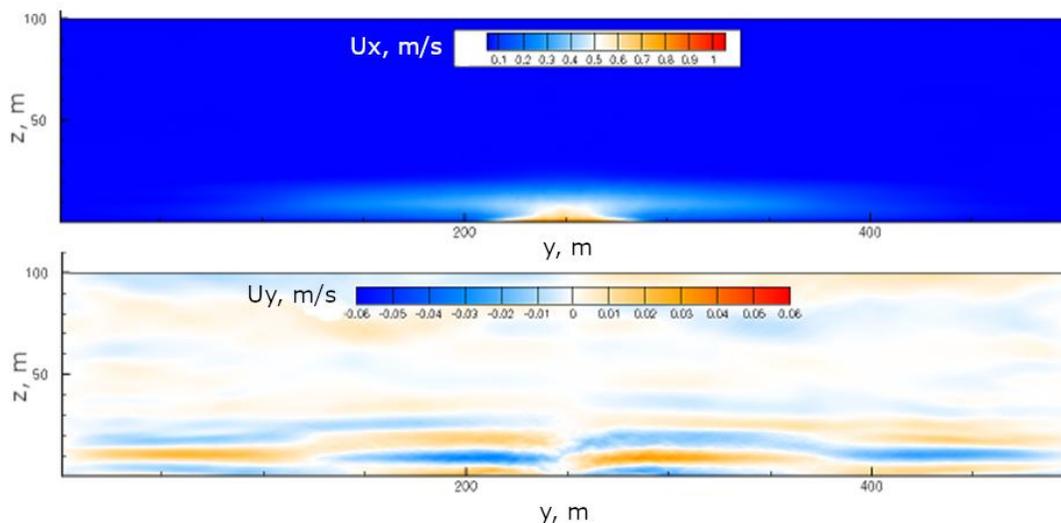


Рисунок 4.3 - Распределения средней по времени продольной и поперечной компонент скорости в воздухе, вызванные течением реки в случае устойчивой стратификации

Как показали расчеты, импульс переносится от реки в воздух и удерживается в узком слое над рекой, высотой порядка 20 м (Рисунок 4.3). При этом, важную роль играет температурная стратификация. Она не позволяет импульсу распространяться в вертикальном направлении, так как при возникновении вертикальных движений возникает обратная сила отрицательной плавучести, которая подавляет движение в этом направлении. Таким образом, импульс накапливается в узком горизонтальном слое, где скорости достигают величин до 1 м/с.

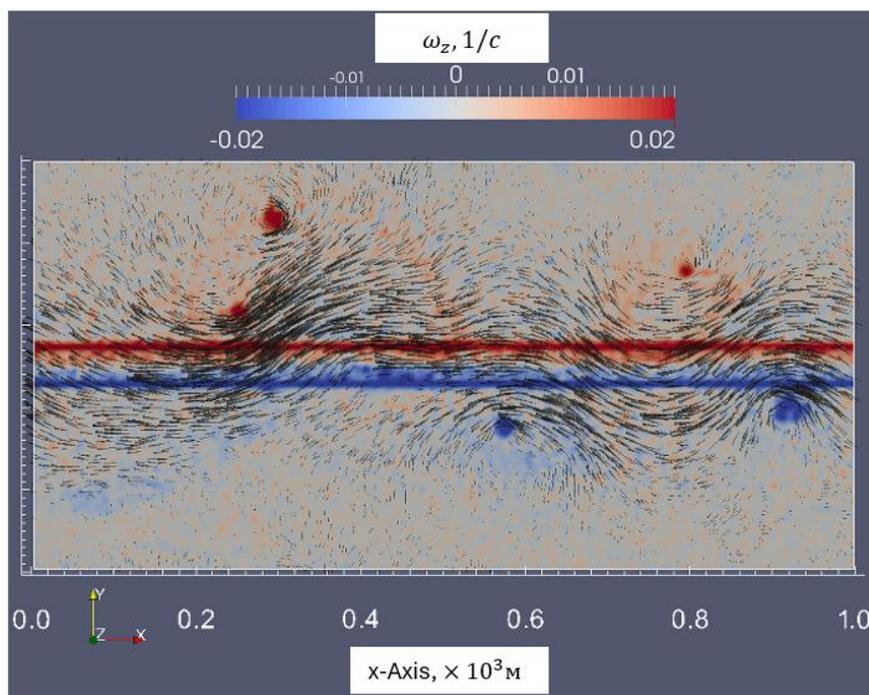


Рисунок 4.4 - Распределение вертикальной компоненты завихренности на высоте 10 м над землей

Оценка масштаба Обухова для точки центра реки дает значение  $\sim 50$  м, что по порядку величины соответствует высоте наблюдаемого слоя смешения. В этом процессе был обнаружен очень интересный эффект: при долгом времени расчета возникали крупные вихри с вертикальным направлением завихренности. Данные вихри находились в узком слое и образовывали вихревые «блины», которые можно видеть на распределении вертикальной компоненты завихренности (Рисунок 4.4). Этот эффект очень похож на генерацию крупномасштабных вихрей в двумерной турбулентности за счет действия обратного каскада энергии. В нашем случае он может наблюдаться, из-за того, что стратификация подавляет вертикальное движение, и турбулентные пульсации в горизонтальном направлении становятся гораздо больше, чем в вертикальном, что делает такое течение квази-двумерным, и в нем могут развиваться механизмы укрупнения вихрей, аналогичные каскаду Крэйчнана для двумерной турбулентности, приводящие к объединению мелких вихрей в крупные. Эти вихри приводят к деформации положений максимума скорости над рекой и к интенсификации горизонтального переноса в направлении перпендикулярном реке.

#### **4.4. Моделирование случаев с течением реки и без него с учетом свободной конвекции**

На втором этапе исследовалось взаимодействие реки с устойчиво-стратифицированной атмосферой при условии более теплой поверхности реки по сравнению с окружающей почвой. Расчетная сетка содержала приблизительно 70 миллионов узлов, с размером расчетной области  $500 \times 500 \times 250$  м. Сетка была сгущена к нижней границе. Первая прилегающая к нижней поверхности ячейка имела размер  $0,8 \times 0,8 \times 0,1$  м. Интенсивность инверсии была установлена равной  $10^\circ\text{C}/\text{км}$ . Поперечный размер реки был выбран равным 80 м. Температуры реки и окружающей поверхности равнялись  $25^\circ\text{C}$  и  $20^\circ\text{C}$  соответственно.

В качестве поля скорости на поверхности реки был использован профиль скорости, полученный для эллиптического профиля русла реки с максимальной глубиной 10 метров и максимальной скоростью равной 3 м/с. Такое высокое значение скорости было выбрано, чтобы сделать эффект речного потока более выраженным.

На поверхности реки задавалась концентрация водяного пара, равная насыщению при температуре поверхности. Вне реки в начальный момент расчета задавалась влажность 10% от насыщения. В целом, включение влажности приводило к усилению конвективного эффекта по сравнению со случаем без учета влажности.

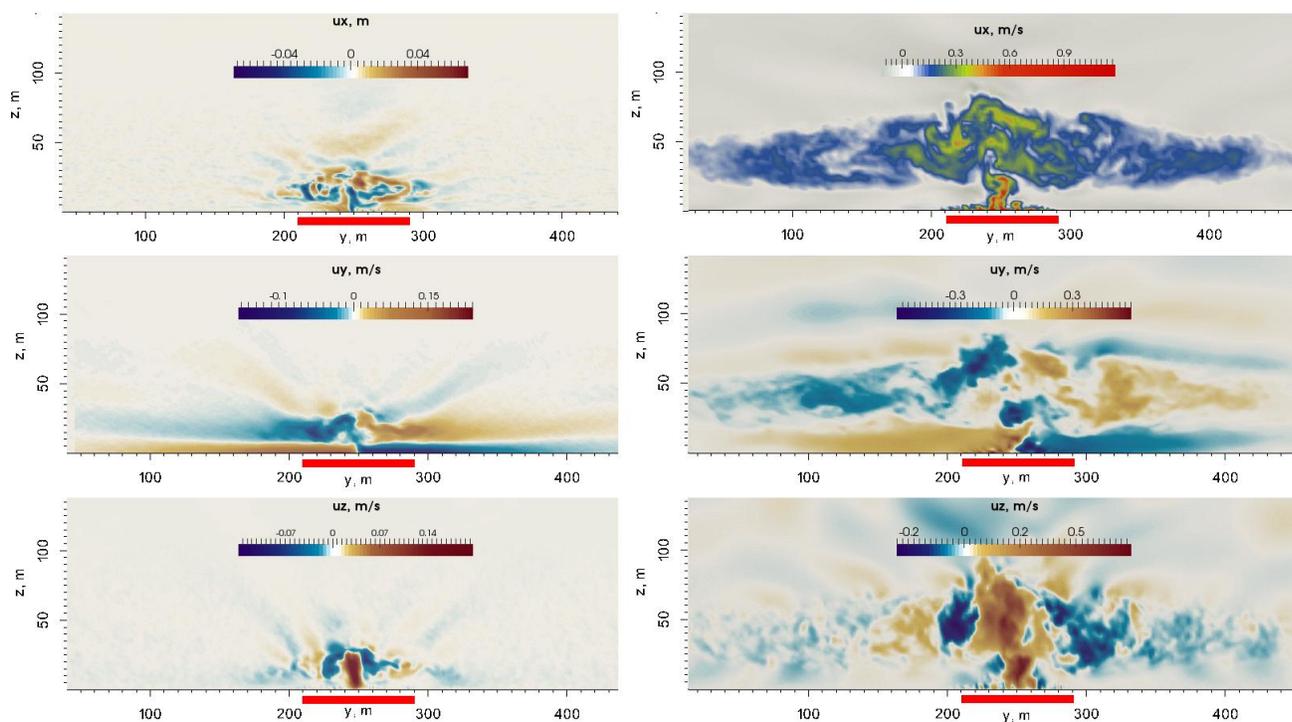


Рисунок 4.5 - Мгновенные поля различных компонент скорости в центральном сечении для случаев без течения реки (слева) и с течением (справа) для времени  $t = 30$  мин; Поверхность реки обозначена красной линией

На Рисунке 4.5 показаны мгновенные поля скорости в центральном сечении для случаев без течения реки и с течением. Как видно, эффект течения реки значительно усиливает конвективное движение воздуха, что приводит к гораздо более высокому поднятию инверсионного слоя. Можно видеть, что вертикальная компонента скорости примерно в 3 раза выше в случае движущейся реки ( $\sim 0.5$  м/с против 0.14 м/с в случае отсутствия течения).

В случае неподвижной реки динамика потока прекращает развиваться после подъема слоя инверсии до высоты приблизительно 50 метров, как показано на Рисунке 4.5 (слева). Это происходит из-за влияния образующейся горизонтальной циркуляции. После подъема воздух движется горизонтально от реки под слоем инверсии и возвращается на более низких высотах. Когда он движется обратно над холодной поверхностью, он остывает и при достижении реки уменьшает интенсивность центрального восходящего потока за счет своей низкой температуры, что приводит к замедлению прорастания слоя инверсии. При таких условиях поток достигает скорости всего лишь  $\sim 0.2$  м/с.

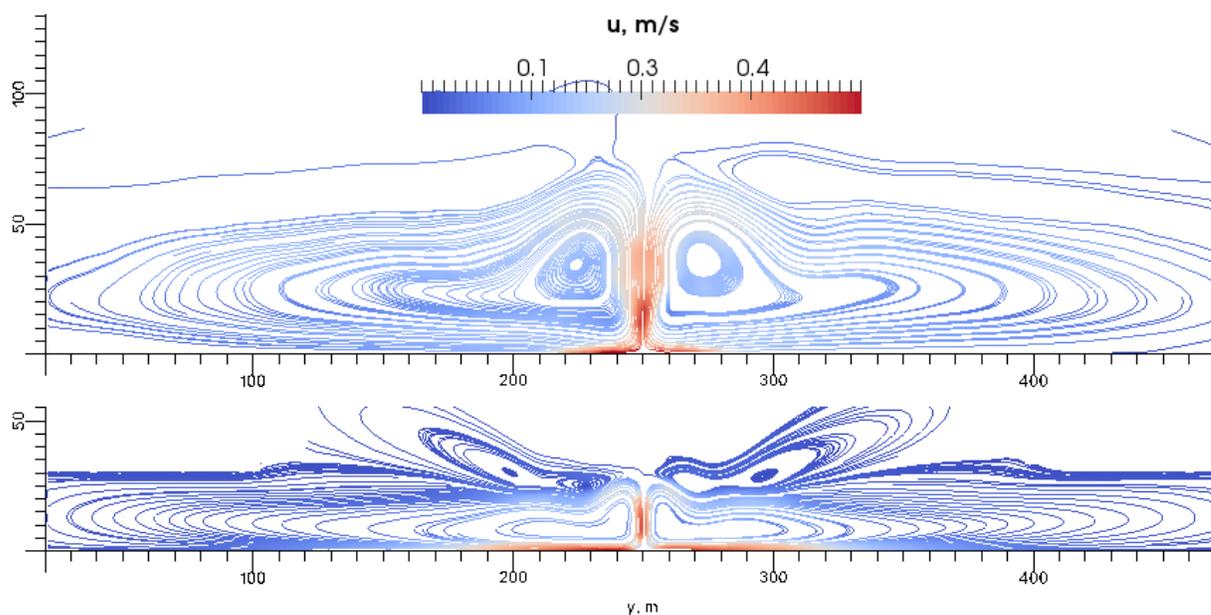


Рисунок 4.6 - Средние линии тока для случаев без течения реки (снизу) и с течением (сверху)

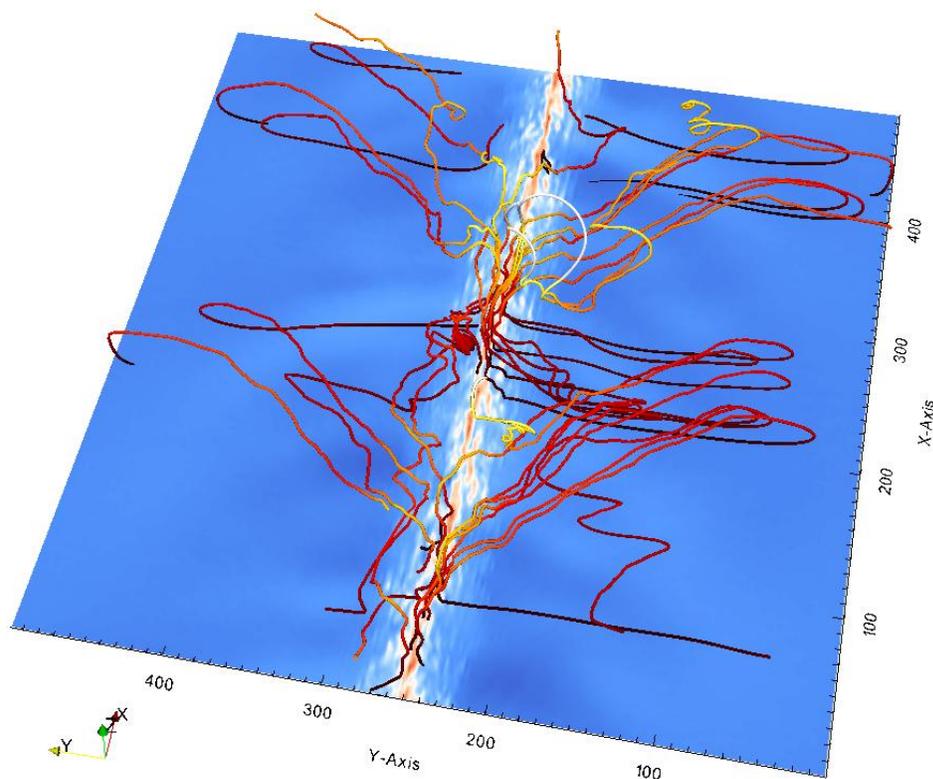


Рисунок 4.7 - Мгновенные линии тока для случая с течением реки

В случае движущейся реки взаимодействие сдвига с восходящими потоками приводит к образованию сильных турбулентных вихревых структур, которые значительно интенсифицируют перемешивание, что приводит к более быстрому прорастанию инверсионного слоя в сравнении с случаем без течения (Рисунок 4.6). Из-за воздействия вертикальной компоненты завихренности,

переносимой от реки в восходящем потоке, в течении начинают проявляться трехмерные эффекты. Это приводит к тому, что меняется профиль горизонтальной скорости, уменьшается модуль сдвига на поверхности, что снижает охлаждающий эффект грунта на центральный восходящий поток. Помимо этого, сдвиг на поверхности реки увеличивает тепловой поток с поверхности. Таким образом, инверсионный слой поднимается гораздо выше до высоты  $\sim 100$  м, а горизонтальные скорости над рекой достигают значений  $\sim 0,7$  м/с. Интересно отметить, что продольная  $x$ -компонента скорости, возникающая в результате движения реки, переносится вверх (Рисунок 4.5), где она выступает в качестве источника турбулентности, усиливая перемешивание.

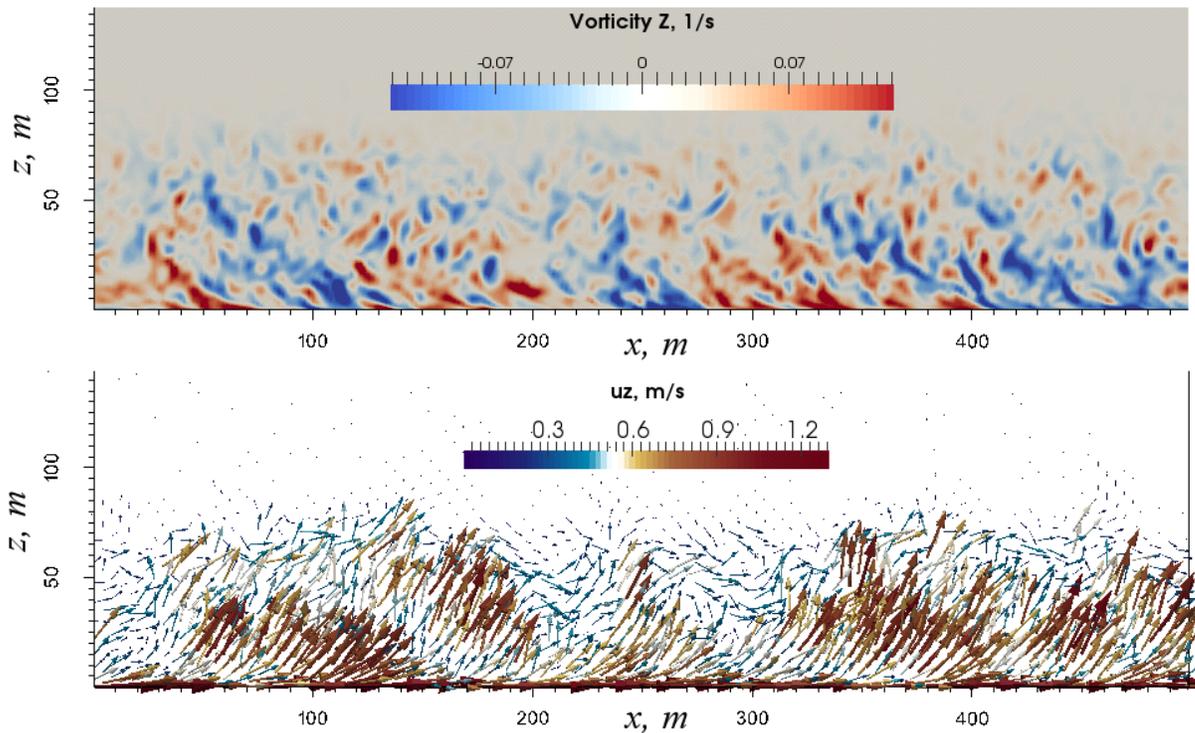


Рисунок 4.8 - Мгновенные распределения вертикальной компоненты завихренности (сверху) и вектора скорости (внизу) в поперечном сечении вдоль центральной линии реки для случая движущейся реки ( $t = 30$  мин)

Распределение вертикальной компоненты завихренности и вектора скорости в поперечном сечении вдоль реки (Рисунок 4.8) показывает наличие больших вихревых образований с чередующимися знаками, появляющимися в шахматном порядке. Оси вихрей наклонены в направлении, противоположном движению реки. В то же время векторы скорости также наклонены почти под прямым углом к осям вихрей. Эта конфигурация создает волнообразное искажение слоя инверсии и некоторые специфические динамические эффекты, которые требуют дополнительного изучения. В частности, мгновенные линии тока (Рисунок 4.7) имеют интересную, треугольную

форму, после подъема в восходящем течении воздух движется по диагонали в сторону от реки и вдоль ее движения. В нижней области слоя смешения течение воздуха вдоль реки отсутствует, и он движется горизонтально в направлении перпендикулярном реке.

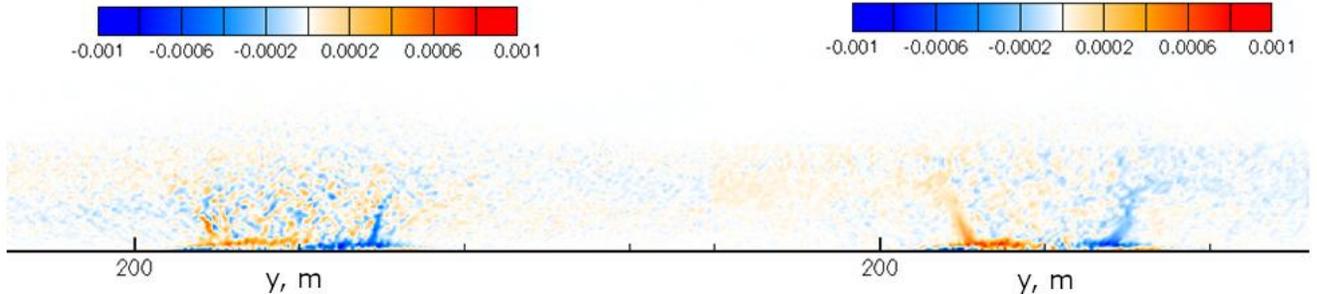


Рисунок 4.9 - Перенос вертикальной компоненты завихренности в вертикальном направлении  $u_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z}$  (слева), переход завихренности из горизонтальной компоненты в вертикальную за счет наклона вихревых линий  $-\omega_y \frac{\partial u_z}{\partial y}$  (справа)

Вертикальная компонента завихренности в данном случае может возникать по двум механизмам, либо за счет переноса вертикальной компоненты завихренности, созданной горизонтальным сдвиговым течением на границе между берегом и рекой, либо за счет наклона горизонтальной компоненты завихренности при ее подъеме в центральном восходящем потоке. Чтобы выяснить роль этих механизмов были рассчитаны компоненты производства и конвективного переноса вертикальной компоненты завихренности (Рисунок 4.9).

Оба механизма интенсификации вертикальной компоненты завихренности являются важными, перенос вертикальной компоненты завихренности от берегов происходит в основном вертикально вверх вдоль границ реки. Однако на больших высотах его превосходит второй эффект – наклон горизонтальной компоненты завихренности в центральном восходящем потоке. Перпендикулярная к реке компонента завихренности является основным продуктом напряжения трения над рекой и в начальный момент сконцентрирована в узком слое, затем ее концентрация начинает падать, и одновременно возрастает концентрация вертикальной компоненты завихренности. Прямой расчет показывает, что именно деформация этого сдвигового течения приводит к основной части генерации вертикальной компоненты завихренности в виде противоположно-вращающихся вихревых пар, которые затем ориентируются в шахматном порядке в виде вихревых колонн с противоположным вращением над рекой (Рисунок 4.8).

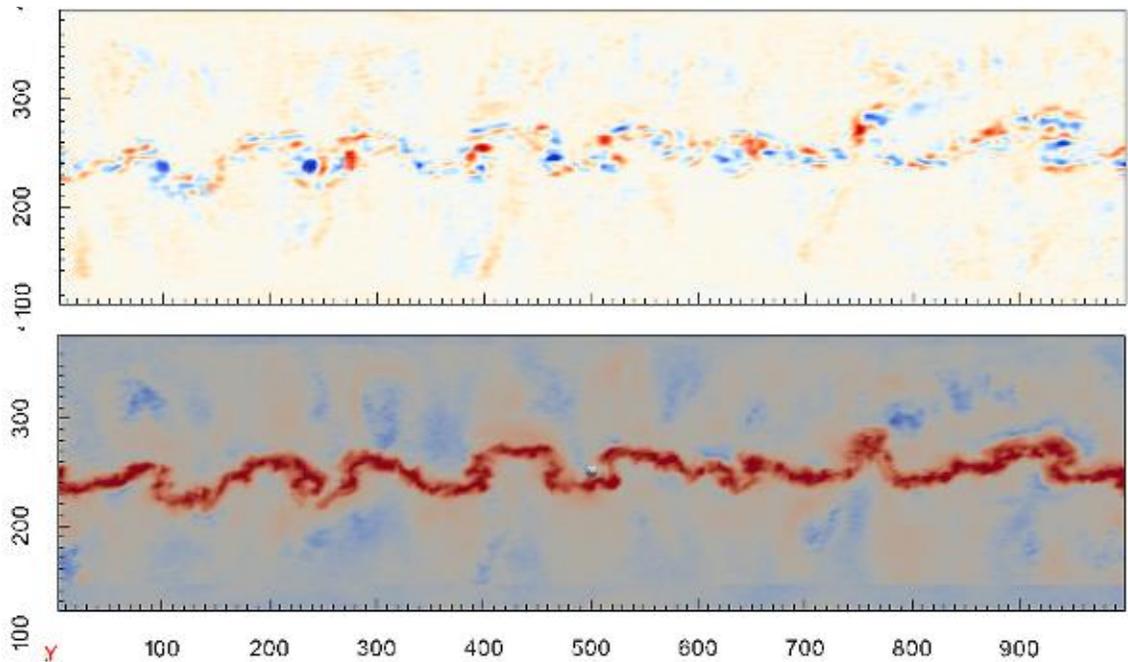


Рисунок 4.10 - Вертикальная компонента завихренности в сечении  $z=20$  м (вверху), вертикальная компонента скорости в том же сечении (посередине), снимок колоннообразных структур над р.Енисей (внизу)

Вертикальные колоннообразные вихри, концентрирующие в себе вертикальную компоненту завихренности, наблюдаются над реальными реками в условиях приземной инверсии (Рисунок 4.10). Данные колоннообразные структуры с противоположным вращением в центре реки были наблюдаемы в природе над р. Енисей в зимний период за чертой города в утреннее время, когда тепловой нагрев почвы солнцем еще не приводил к разрушению слоя приземной инверсии.

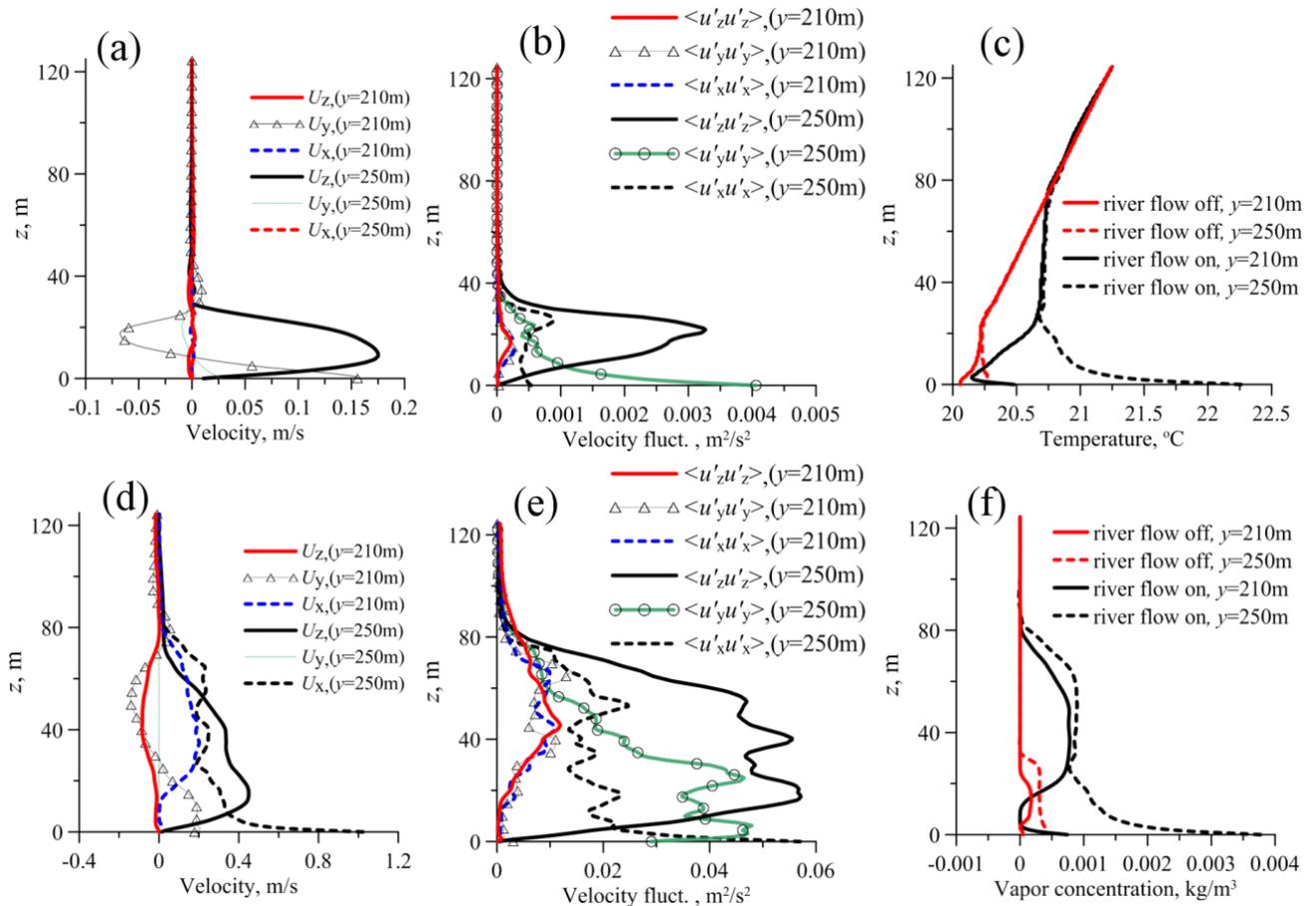


Рисунок 4.11 - Средние профили скорости (a,d), пульсаций скорости (d,e), температуры (c) и влажности (f) осредненные вдоль оси x (a,b соответствуют случаю без течения реки; d,e – с течением), для времени  $t = 30$  мин

На Рисунке 4.11 показаны профили усредненных по пространству (вдоль однородной оси x) полей для обоих смоделированных случаев в двух точках, одна над центральной линией реки ( $y = 250$  м), а другая - над берегом реки ( $y = 210$  м). Профили компонент средней скорости (Рисунок 4.11 a, d) показывают, что в случае движения реки горизонтальные циркуляции имеют заметно большую высоту. Видно, что при учете движения реки, скорость вдоль течения переносится вертикально на высоту около 20 м, после чего распространяется в стороны, образуя область с продольным течением над землей, в которой амплитуда скорости составляет 10% от скорости реки. Скорость в перпендикулярном направлении  $U_y$  (образующая горизонтальную циркуляцию) в несколько раз выше скорости для случая без течения реки. Видно, что в слое от 20 м до 80 м также накапливается концентрация водяного пара, перенесенная с поверхности реки. Пульсации скорости имеют сильно анизотропную структуру, что говорит о наличии когерентных структур и крупных вихрей в области

восходящего потока над рекой. Наибольшей амплитудой в области над поверхностью обладают пульсации вертикальной компоненты скорости.

По результатам расчетов можно сделать вывод, что течение реки в условиях устойчивой стратификации способно оказывать значительное влияние на структуру потока, несмотря на небольшую скорость течения. В стратифицированных условиях вертикальное движение подавляется отрицательной плавучестью, вследствие чего горизонтальный импульс накапливается в узком слое вблизи реки и интенсивно взаимодействует с восходящим конвективным потоком от реки, что приводит к формированию больших вихревых образований с чередующимися знаками, появляющимися в шахматном порядке. Также стоит отметить, что наличие течения реки приводит к значительному увеличению теплового потока с поверхности воды. Таким образом, при наличии сдвига подстилающей поверхности инверсионный слой поднимается гораздо выше, чем в случае без течения.

Для комбинированного случая, в области восходящего потока над рекой наблюдается формирование устойчивых шахматных вихрей прямо над поверхностью реки вращающихся в противоположном друг другу направлении, с доминирующей вертикальной компонентой завихренности. При этом максимумы вертикальной скорости соответствуют положениям центров этих вихрей, то есть вихри являются спиральными.

#### 4.5. Моделирование влияния изгиба формы реки на течение в воздухе

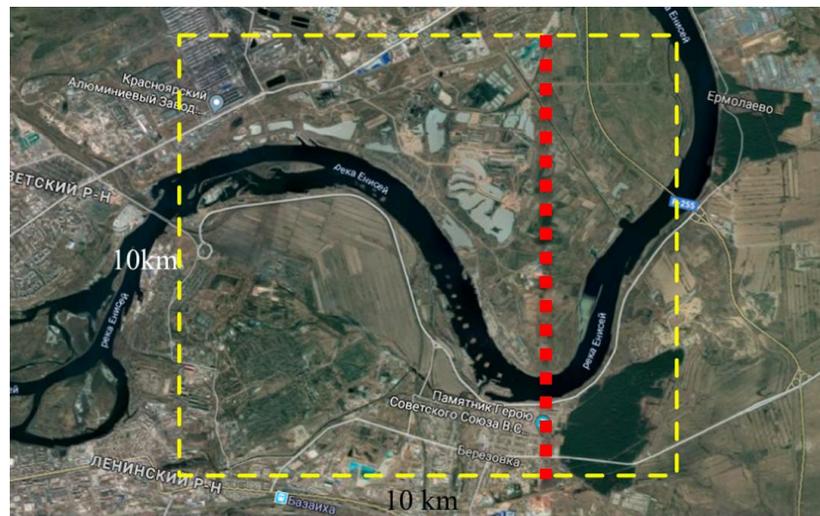


Рисунок 4.12 - Расчетная область, в окрестностях города Красноярска. Желтым пунктиром обозначены границы области, красным – сечение, в котором производились вычисления средних характеристик потока

Для изучения эффекта формы реки, был проведен расчет суточной эволюции пограничного слоя для участка реки Енисей вблизи города Красноярск. Для данного расчета был выбран участок размером 10x10 км в окрестностях города Красноярск содержащий в себе два изгиба различной выпуклости в русле реки (Рисунок 4.12). Территория вокруг реки представляет собой равнинную местность, что создает определенные удобства для моделирования и позволяет изолировать эффект, оказываемый течением реки от эффектов, вызванных наличием неоднородного рельефа. С другой стороны, интересно было пронаблюдать, какой эффект окажут повороты (изгибы) реки на конвективное течение в различных фазах суточного цикла.

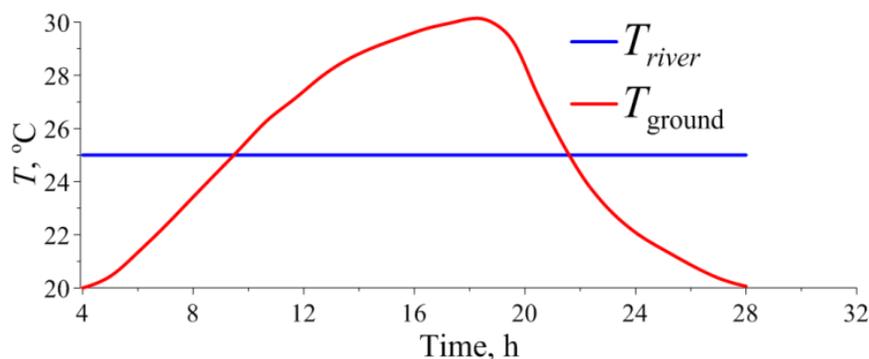


Рисунок 4.13 - Суточная эволюция температуры поверхности, используемая в расчете

В качестве начального профиля температуры в воздухе задавалась устойчивая стратификация с амплитудой инверсии  $2^{\circ}\text{C}/\text{км}$ . В течение дня температура менялась по закону, полученному из осреднения наблюдений июня с метеостанций Красноярск (Рисунок 4.13).

Температура почвы менялась от  $20^{\circ}\text{C}$  до  $30^{\circ}\text{C}$  в течение суток. При этом температура реки задавалась равной среднесуточной температуре поверхности ( $25^{\circ}\text{C}$ ). На боковых границах задавались периодические условия, это могло вносить погрешность в расчеты, но это было вынужденной мерой в связи с ограничениями на расчетное разрешение, и невозможностью взять область большего размера. Число узлов сетки равнялось  $1024 \times 1024 \times 256$  в двух горизонтальных и вертикальном направлениях соответственно. По вертикали использовалось сгущение в сторону поверхности. Вблизи поверхности расчетная ячейка имела размеры  $10 \times 10 \times 1$  м. Вертикальный размер области составлял 1 км. На поверхности воды задавалась насыщенная концентрация водяного пара для данной температуры.

Для определения поля скорости на поверхности реки был проведен расчет в двумерной постановке, с использованием программы, разрешающей осредненные по глубине уравнения Рейнольдса для вязкой жидкости, аналогично предыдущему случаю. При этом средняя амплитуда скорости воды задавалась равной  $1.5$  м/с.

Процесс расчета суточной эволюции начинается в ночных условиях, когда температура реки на 5 °C выше, чем температура окружающей почвы. В начале расчета над поверхностью реки начинает образовываться восходящий поток, оказывающий влияние на локальное прорастание слоя смешения. Затем воздух начинает распространяться по горизонтали, и в результате над рекой начинает формироваться циркуляционное течение на небольшой высоте.

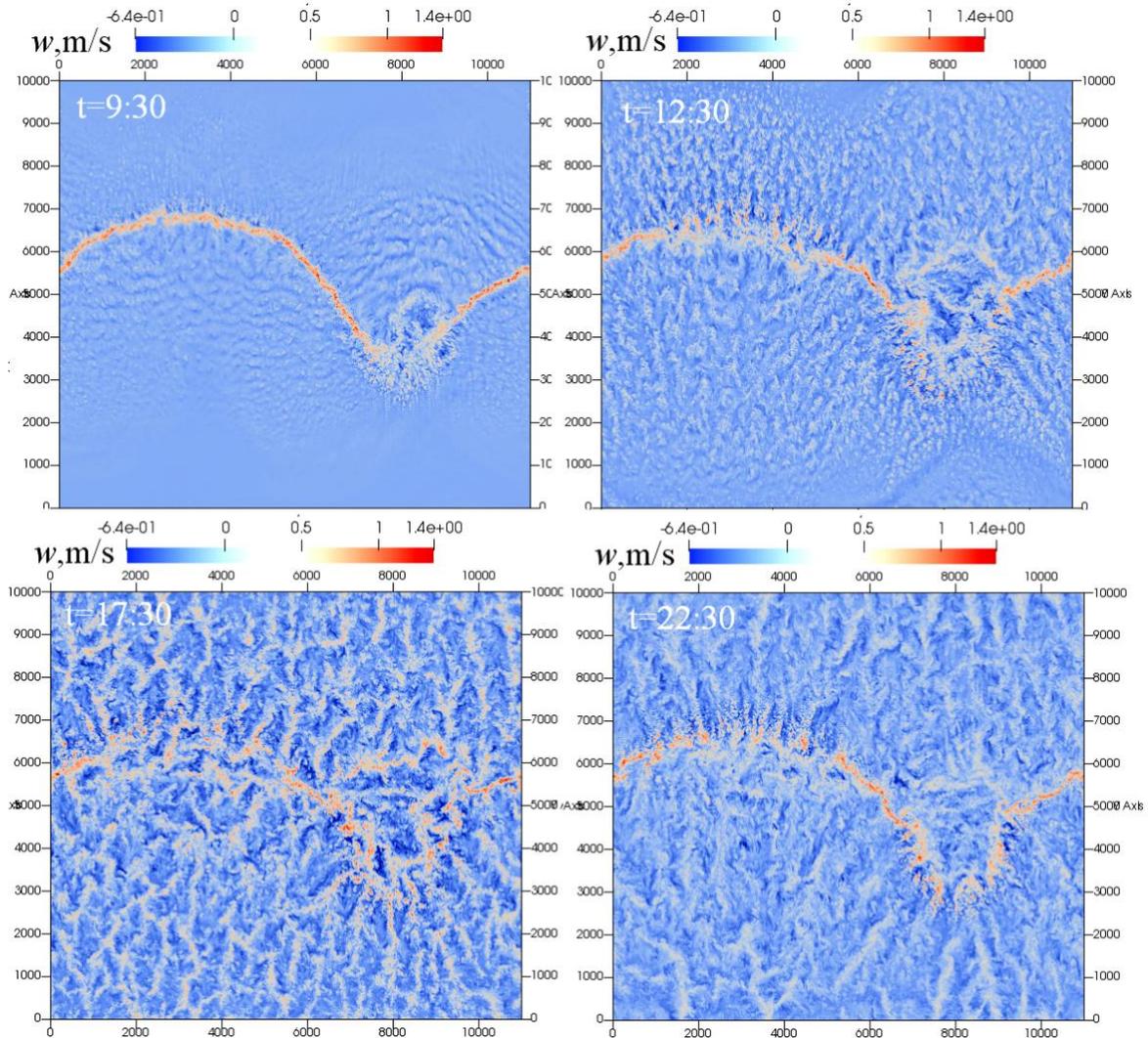


Рисунок 4.14 - Вертикальная компонента скорости в различные моменты времени на высоте 100м.

По мере того, как нагрев почвы усиливался, над ней начинают возникать конвективные ячейки, находящиеся в области занимаемой циркуляцией, созданной рекой, что приводит к началу взаимодействия ячеек с циркуляционным течением и к изменению структуры течения (Рисунок 4.14). Интересным является то, как меняются вихревые структуры во время эволюции пограничного слоя. Сначала появляются вихревые валы с направлением завихренности вдоль реки, пока почва холодная, затем возникают конвективные ячейки, которые затем преобразуются в продольные

конвективные валы, направленные к реке. Подобные продольные вихри ранее наблюдались в расчетах для Красноярска методом RANS [32]. Как показано на мгновенных распределениях вертикальной компоненты скорости (Рисунок 4.14), взаимодействие формирующихся конвективных ячеек с циркуляционным течением от реки существенно изменяет структуру течения со временем.

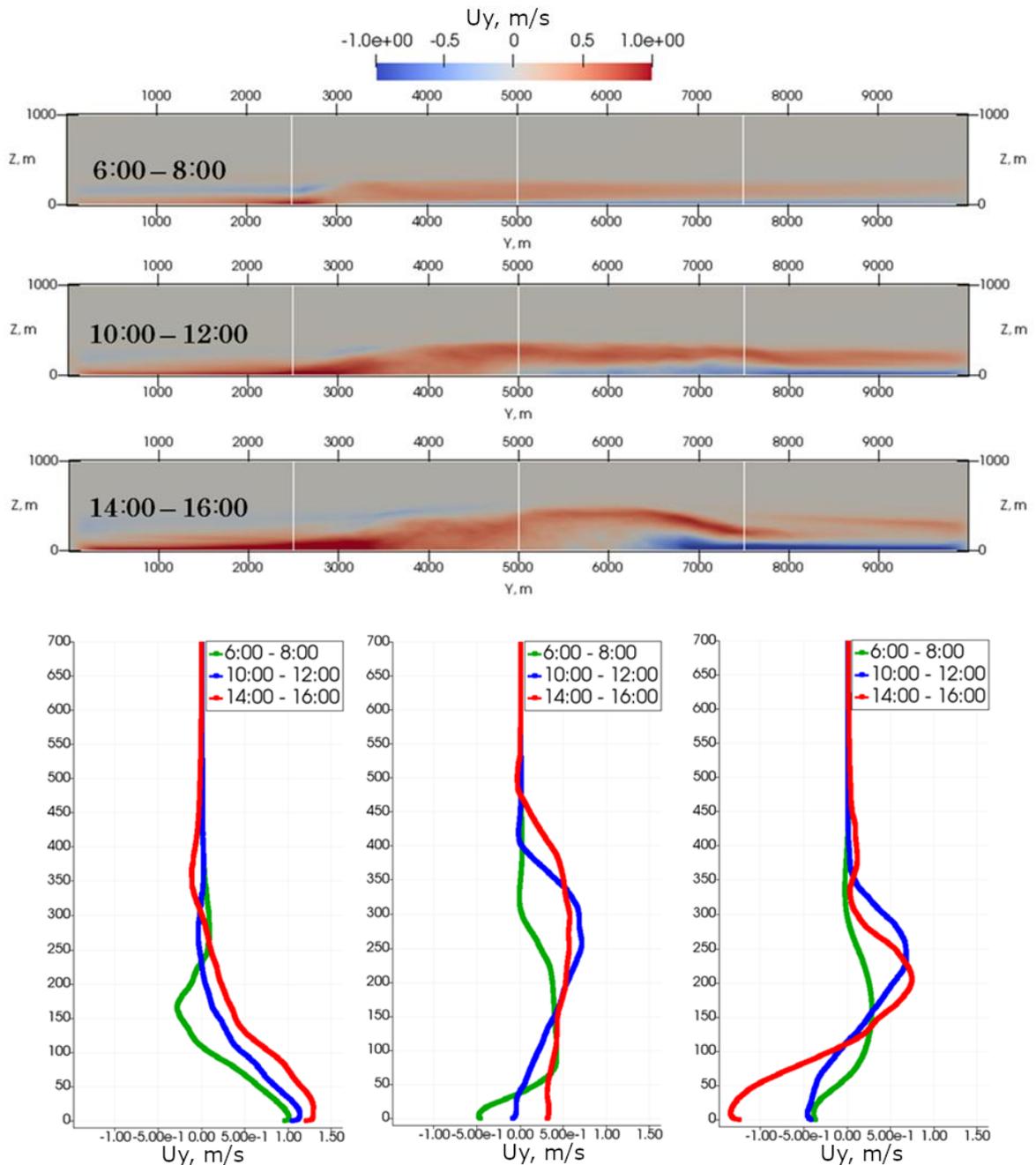


Рисунок 4.15 - Осредненная по различным интервалам времени поперечная компонента скорости  $U_y$  в сечении  $X = 2500$  м (сверху) и профили поперечной компоненты скорости  $U_y$  в трех различных сечениях  $X = 2500$  м,  $Y = 2500, 5000, 7500$  м (снизу)

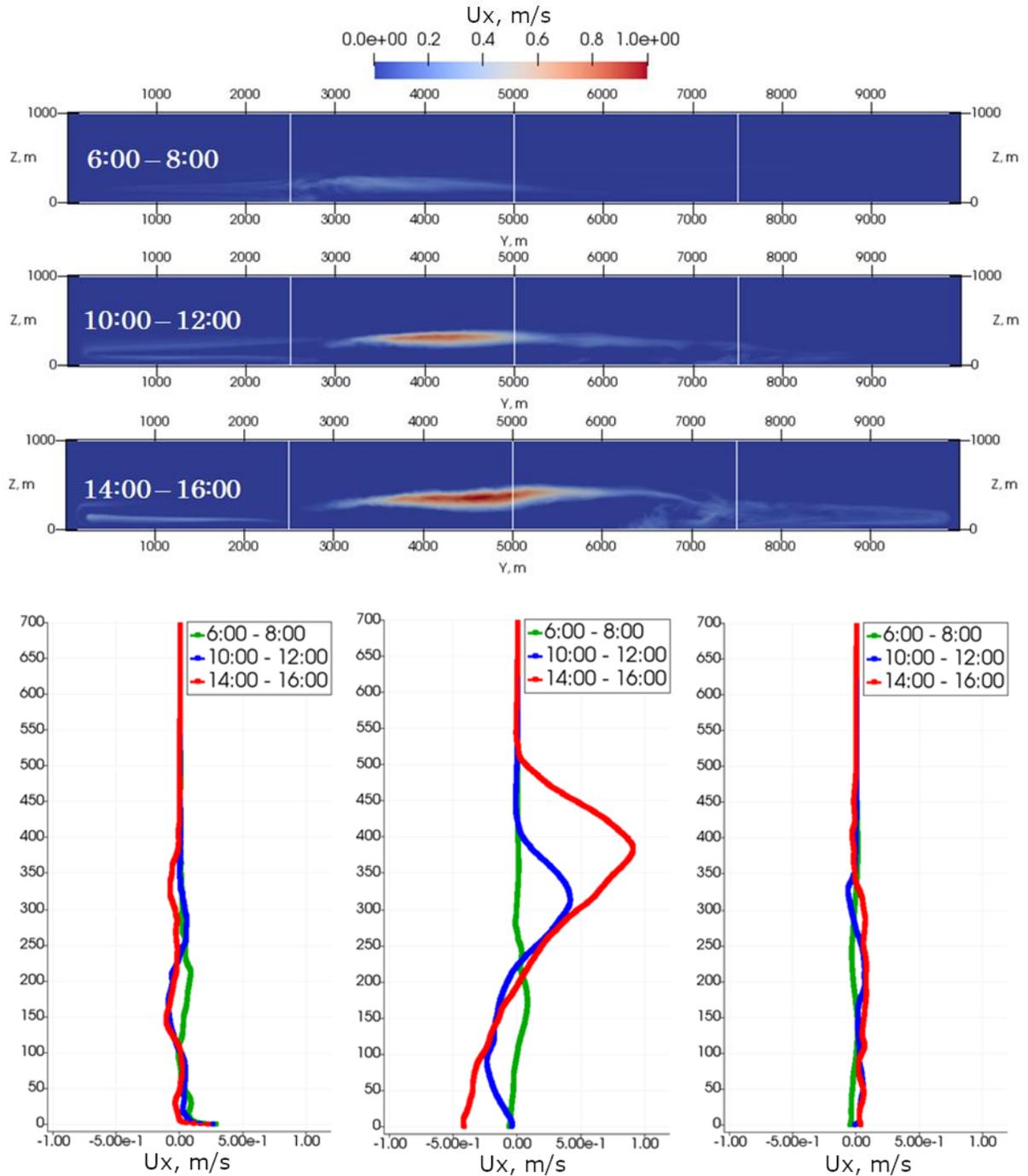


Рисунок 4.16 - Осредненная по различным интервалам времени продольная компонента скорости  $U_x$  в сечении  $X = 2500$  м (сверху) и профили продольной компоненты скорости  $U_x$  в трех различных сечениях  $X = 2500$  м,  $Y = 2500, 5000, 7500$  м. (снизу)

Вертикальные профили продольной и поперечной компонент скорости с осреднением за 2 часа показаны на Рисунках 4.15, 4.16. Профили приведены в сечении, обозначенном красным цветом на Рисунке 4.12. Положение реки соответствует  $Y = 3000$  м. На рисунках видно, что по

разные стороны от реки слой смешения прорастает на существенно разную высоту, что иллюстрирует эффект формы реки. При этом видно, что по мере прогрева почвы воздух начинает переноситься через точку максимальной кривизны реки с одного берега на другой. С течением времени видно общее усиление горизонтального циркуляционного течения за счет энергии конвективных ячеек, включающихся в среднее циркуляционное течение, образованное за счет реки.

Также видно накопление продольной компоненты импульса в слое смешения над рекой (Рисунок 4.16). Продольная компонента скорости инициируется течением реки и затем переносится за счет горизонтальной циркуляции вверх к центру расчетной области. Этот эффект обусловлен взаимодействием течения с восходящим от реки конвективным потоком. Данный процесс приводит к локальной интенсификации прорастания слоя смешения.

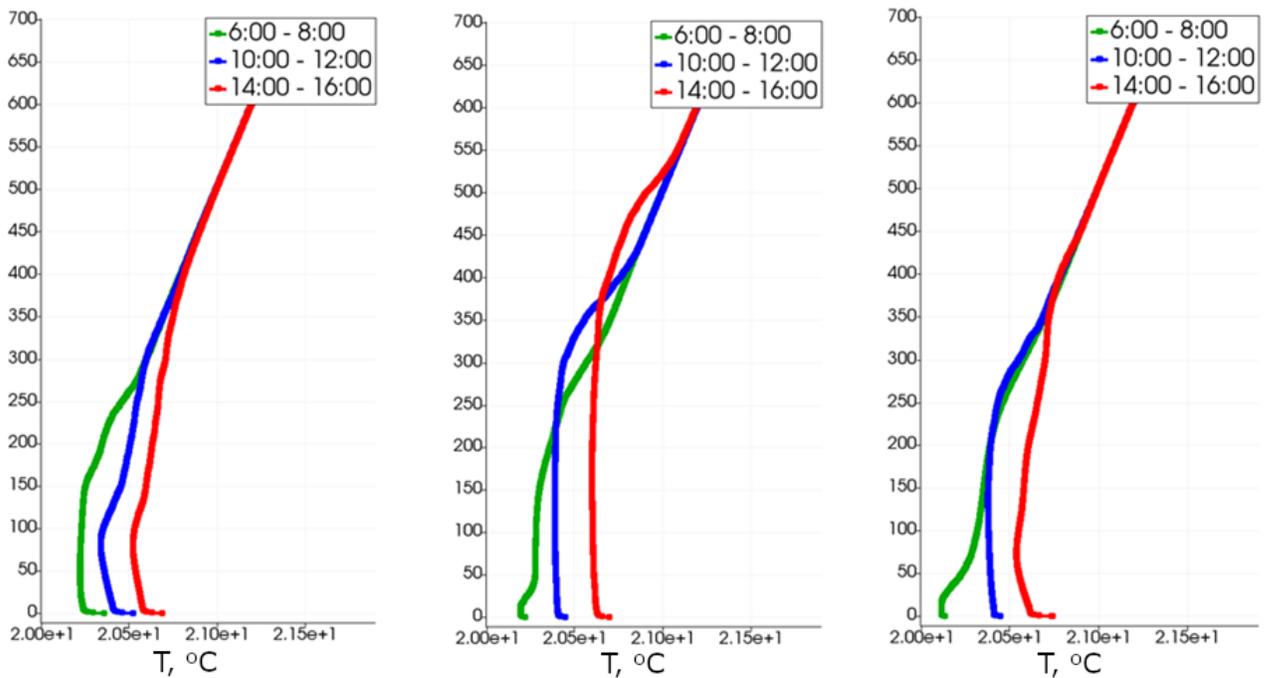


Рисунок 4.17 - Осредненные по различным интервалам времени профили температуры в трех различных сечениях  $X = 2500\text{м}$ ,  $Y = 2500, 5000, 7500\text{м}$

На Рисунке 4.17 можно заметить, что разница в высоте слоя смешения между различными поперечными сечениями потока может достигать до 250 м.



Рисунок 4.18 - Осредненное по различным интервалам времени распределение удельного паросодержания в сечении  $X = 2500$  м (сверху) и профили удельного паросодержания в трех различных сечениях  $X = 2500$  м,  $Y = 2500$ ,  $5000$ ,  $7500$  м (снизу)

Распределения удельного паросодержания, представленные на Рисунке 4.18, показывают, что в начальный момент времени влага, испаряемая с поверхности реки, под воздействием восходящего потока поднимается до некоторой высоты. Однако при дневной интенсификации циркуляционного течения и возникновении переноса воздуха с одного берега реки на другой, возникает поперечная

компонента скорости, которая сносит влагу от реки к центру области.

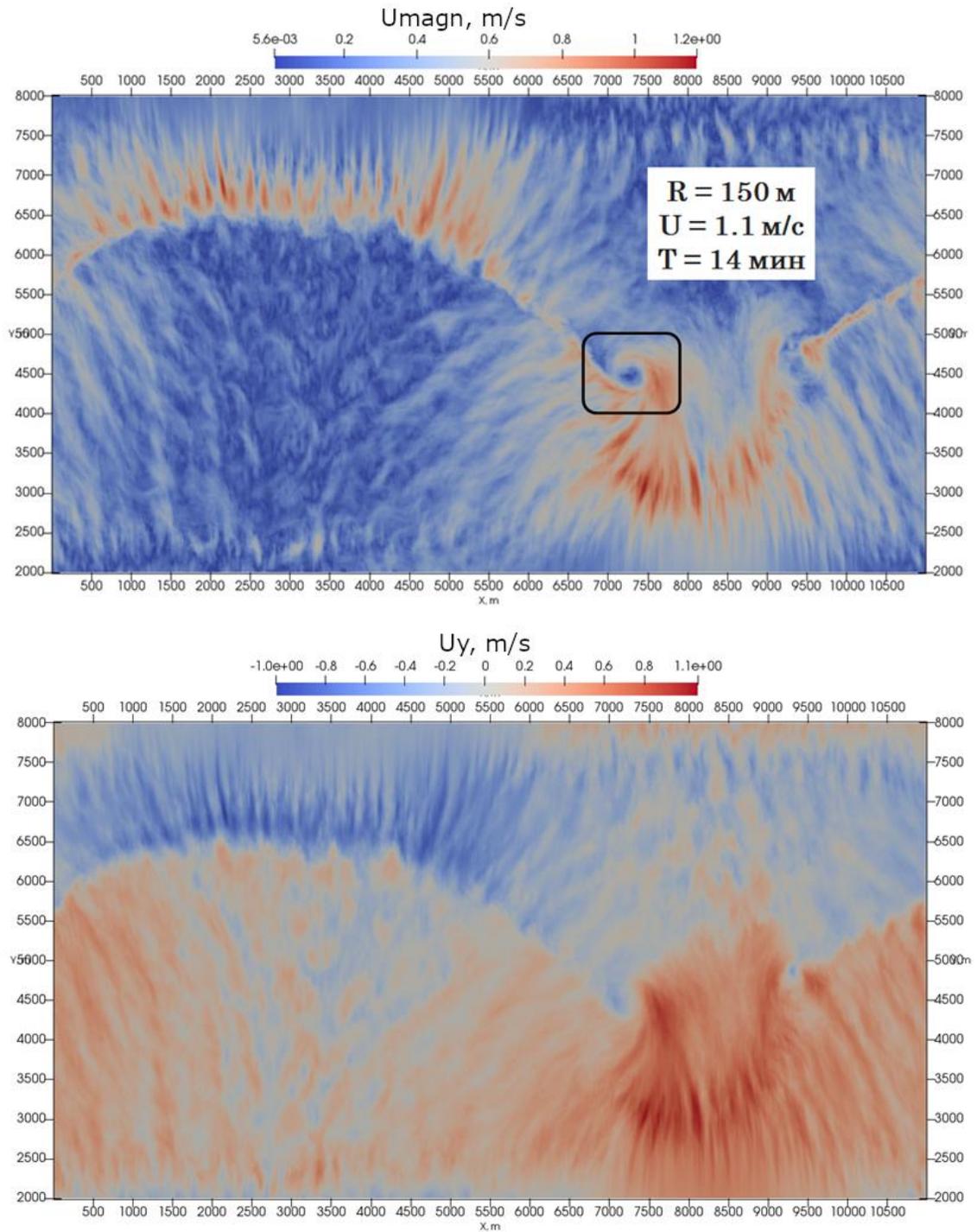


Рисунок 4.19 - Распределение амплитуды (сверху) и поперечной компоненты (снизу) скорости в горизонтальном сечении на высоте 100м, осредненное по интервалу времени 10:30 – 11:30. Обозначена область формирования устойчивого вихря в месте соединения двух изгибов реки.

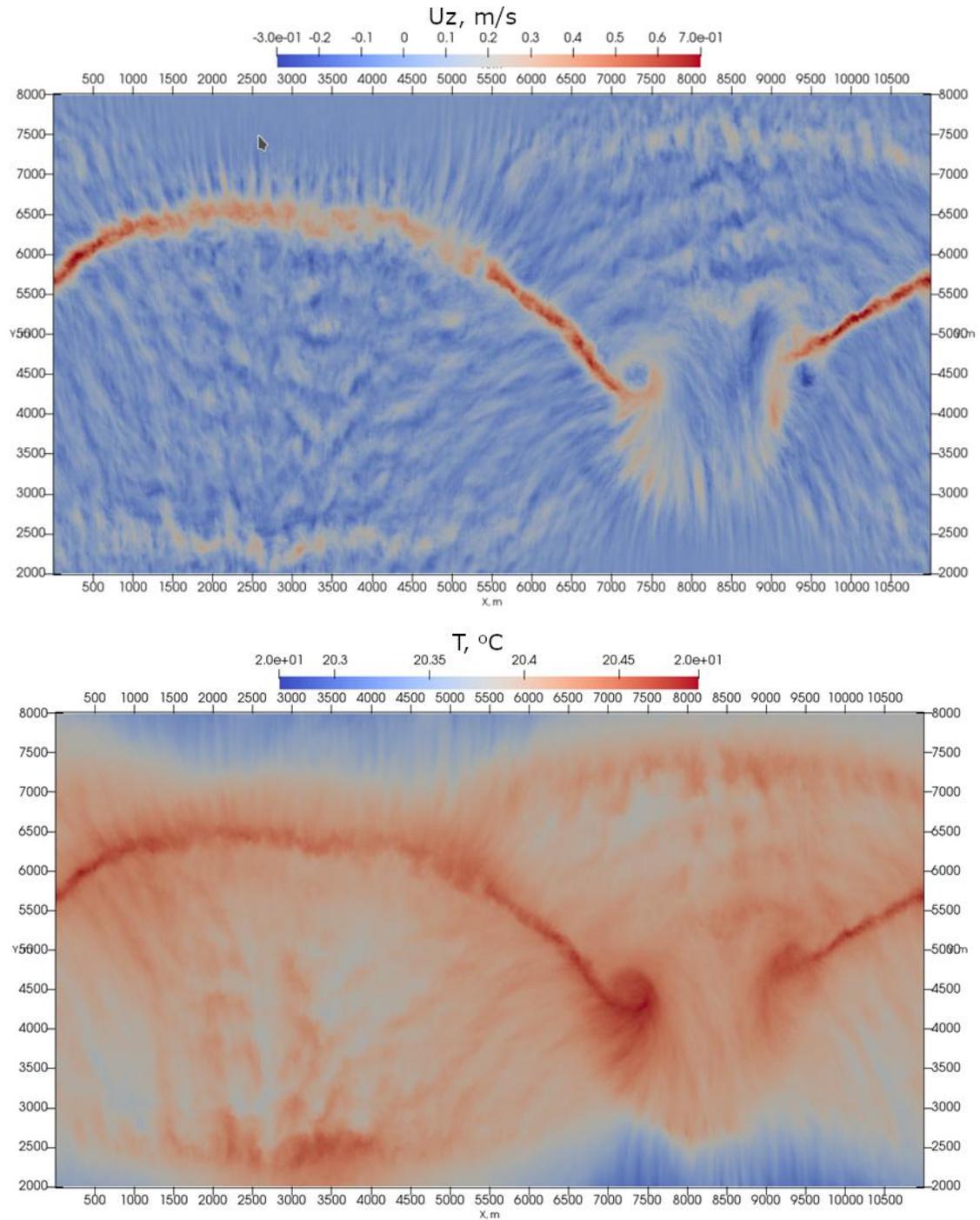


Рисунок 4.20 - Распределение вертикальной компоненты скорости (сверху) и распределение температуры (снизу) в горизонтальном сечении на высоте 100м, осредненное по интервалу времени 10:30 – 11:30

Другим эффектом, обнаруженным при моделировании, был эффект кривизны реки на накопление над рекой вертикальной компоненты завихренности. В процессе утреннего нагрева почвы в точке максимальной кривизны изгиба реки наблюдался поперечный к реке струеобразный

поток. На распределениях продольной компоненты скорости (Рисунок 4.16 сверху) и удельного паросодержания (Рисунок 4.18 сверху) видно, что области с максимальными значениями на высоте 300-400 метров сместились в поперечном направлении на 1.5 км за несколько часов, что демонстрирует влияние струеобразного потока, так как сечение построено в точке максимальной кривизны реки, в которой интенсивность струеобразного потока максимальна. На Рисунке 4.19 видно, что струеобразный поток направлен к центру кривизны, при этом, чем меньше радиус кривизны, тем интенсивнее течение.

При наличии чередующихся изгибов реки в точках нулевой кривизны могут образовываться устойчивые вертикальные вихри. Наличие такого вихря в точке нулевой кривизны показано на Рисунке 4.19. При анализе характеристик этого вихря было обнаружено, что период обращения вихря составляет около 15 минут, а горизонтальный размер около 150 метров. Время жизни вихря составляет около 1,5 часов.

Из-за большого размера вихревого ядра (где вращение напоминает твердотельное) максимальная скорость в вихре находится на его периферии. Холодный воздух опускается в центр вихря, а более горячий воздух поднимается на периферии вихря в соответствии с распределениями с вертикальной компоненты скорости и температуры (Рисунок 4.20).

#### 4.6. Выводы

В данной главе методом крупных вихрей (LES) с высоким разрешением была исследована эволюция взаимодействия локальной неоднородности тепла и поверхностного сдвига на конвективное течение в условиях с устойчивой температурной стратификацией. Для анализа расчетных данных были построены мгновенные и осредненные по времени и по пространству характеристики потока, позволяющие эффект от комбинированного воздействия сдвига и плавучести на ночной пограничный слой.

Для получения полей скорости в реке был реализован программный код, разрешающий осредненные по глубине уравнения Рейнольдса для различных форм дна. С помощью данного программного кода были получены поля скорости на поверхности реки, которые впоследствии использовались в качестве граничных условий на горизонтальную компоненту скорости на нижней границе области в LES расчетах.

Результаты расчетов динамики атмосферного пограничного слоя в идеализированной постановке показывают, что течение реки может оказывать существенное влияние на динамику

ночного АПС, когда сильные конвективные движения воздуха ослабляются устойчивой стратификацией. В таких условиях течение может значительно интенсифицировать вертикальный теплоперенос, ускорить размывание слоя инверсии, а также усилить перенос влаги и примесей окружающим воздухом. Наблюдается ускорение вертикального прорастания слоя смешения за счет плавучести и образование колоннообразных вихревых структур, концентрирующих в себе как вертикальную компоненту завихренности, так и повышенную температуру и влажность.

В результате расчетов эволюции атмосферного пограничного слоя вблизи изгиба реки в условиях утреннего нагрева поверхности было показано, что изгиб реки в комбинации с ее тепловым эффектом способен оказывать существенное влияние на циркуляцию воздуха. Было обнаружено, что в области максимального изгиба восходящий поток сильно наклонен в сторону центра кривизны, и в этом направлении возникает устойчивое течение через реку с одного берега на другой, с образованием струи на высоте 100 м. Эта струя существенно влияет на перенос примеси. Возникновение такого струеобразного потока приводит к интенсификации переноса тепла влаги и примеси с одного берега на другой.

Также было обнаружено, что в случае, когда имеется несколько последовательных изгибов, наблюдается формирование устойчивых вертикальных вихрей в точках между ними. Эти большие вихри могут иметь горизонтальный размер порядка нескольких сотен метров и вращаться с периодом до нескольких десятков минут. Таким образом, показано, что кривизна реки может играть большую роль в создании горизонтальной циркуляции в течение суток и формировании крупномасштабных вихревых структур, интенсифицирующих теплоперенос в атмосферном пограничном слое.

## Заключение

В данной диссертационной работе выполнено комплексное исследование влияния линейно-протяженной температурной неоднородности на динамику конвективных течений в большом диапазоне чисел Рэлея. Проведено исследование эффектов интенсификации и ослабления циркуляционных течений из-за наличия поверхностной температурной неоднородности. Найден эффект колебаний горизонтального положения восходящего потока, возникающий из-за взаимодействия двух областей горизонтальных циркуляций. Найден диапазон параметров течения, при котором данный эффект наблюдается. Проведен анализ механизма формирования когерентных вихревых структур и колебательных процессов над неравномерно нагретой поверхностью. Построена асимптотическая оценка периода колебаний для различных чисел Рэлея. Исследовано влияние амплитуды линейно-симметричной поверхностной температурной неоднородности на динамику свободно-конвективного течения. Исследовано совместное влияние поверхностной температурной неоднородности и поверхностного сдвига на структуру пограничного слоя в условиях устойчивой стратификации. Показано, что добавление поверхностного сдвига приводит к усилению конвективного теплопереноса вблизи подстилающей поверхности и ускорению прорастания слоя инверсии. Исследовано влияние формы поверхностной температурной неоднородности и поверхностного сдвига на формирование крупномасштабных вихревых структур. Разработана и верифицирована модификация RANS модели для моделирования течений с неоднородной конвекцией для высоких чисел Рэлея.

По итогам работы, получены следующие основные результаты:

1. Исследованы низкочастотные колебания потока, возникающие в течении Рэлея-Бенара при внесении на горизонтальные поверхности линейно-симметричной температурной неоднородности. Исследовано влияние тепловой неоднородности на средние характеристики течения и образующиеся в нем циркуляции. Найден диапазон соотношений между горизонтальным и вертикальным перепадами температур, при которых наблюдается эффект низкочастотных колебаний. Предложен механизм, объясняющий появление колебаний в потоке при данных условиях. Предложена асимптотическая оценка периода колебаний с ростом числа Рэлея.
2. Исследована зависимость характеристик низкочастотных колебаний положения восходящего потока, образующихся под воздействием линейно-симметричной поверхностной тепловой неоднородности, при изменении расстояний между горизонтальными стенками в большом диапазоне чисел Рэлея ( $10^5 - 10^{15}$ ). Проведено сравнение колебаний, возникающих при наличии

верхней стенки, с колебаниями, когда роль вертикального ограничения потока выполняет слой приподнятой инверсии.

3. Предложена и протестирована модификация классической  $k - \epsilon$  модели турбулентности, улучшающая точность восстановления теплового потока на стенке за счет учета эффектов плотностной стратификации в потоке, выраженных через локальное число Ричардсона. Модель протестирована на данных атмосферных наблюдений и показала улучшение восстановления потоков тепла и импульса на стенке по сравнению со стандартной  $k-\epsilon$ -моделью.

4. Численно исследован эффект от течения реки на конвекцию в ночном пограничном слое при условии положительной разности температур между поверхностью реки и окружающей почвы. Было обнаружено значительное ускорение прораствания слоя инверсии над рекой при учете ее течения, а также образование при этом крупномасштабных вихревых структур, концентрирующих в себе как вертикальную компоненту завихренности, так и повышенную температуру. Предложен механизм формирования таких структур за счет подъема завихренности с поверхности восходящим потоком от нагретой реки.

5. Исследовано формирование устойчивого течения воздуха через реку при наличии на реке изгиба. Возникновение такого струеобразного течения приводит к интенсификации переноса тепла, влаги и примеси с одного берега на другой. При наличии нескольких последовательных изгибов реки между ними возникают устойчивые вертикальные вихри, влияющие на циркуляционные течения.

### Список условных обозначений

- $a$  – температуропроводность,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $a_t$  – турбулентная температуропроводность,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $A_u$  – амплитудный множитель для логарифмических профилей скорости;  
 $A_\theta$  – амплитудный множитель для логарифмических профилей температуры;  
 $b$  – скалярное поле «плавучести»,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  
 $c_s$  – константа Смагоринского;  
 $C_\mu$  – эмпирическая константа  $k - \varepsilon$  модели;  
 $f$  – частота, Гц;  
 $f_{\text{cor}}$  – параметр Кориолиса,  $1/\text{с}$ ;  
 $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м}/\text{с}^2$  ;  
 $G$  – вклад плавучести в изменение турбулентной кинетической энергии,  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;  
 $h$  – высота, м;  
 $k$  – кинетическая энергия турбулентности,  $\text{м}^2/\text{с}^2$ ;  
 $L_i$  – линейный размер области в соответствующем направлении, м;  
 $l_m$  – длина смещения, м;  
 $N_i$  – число узлов сетки в соответствующем направлении;  
 $N$  – частота Бранта–Вяйсяля, Гц;  
 $\vec{n}_i$  – единичный вектор в соответствующем направлении;  
 $Nu$  – число Нуссельта;  
 $P$  – производство турбулентной кинетической энергии за счет сдвига,  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;  
 $p$  – давление, Па;  
 $p_s$  – давление насыщенных паров, Па;  
 $Pr$  – число Прандтля;  
 $Pr_t$  – турбулентное число Прандтля;  
 $q$  – тепловой поток,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $q_t$  – полная концентрация воды;  
 $q_l$  – концентрация жидкой фазы;  
 $q_s$  – концентрация насыщения;  
 $Ra$  – числе Рэлея;  
 $Re$  – число Рейнольдса;

$Ri$  – число Ричардсона;

$Ri_f$  – локальное градиентное число Ричардсона;

$R_{dry}$  – газовая константа для сухого воздуха, Дж/(кг·К);

$R_{vapor}$  – газовая константа для водяного пара, Дж/(кг·К);

$S_{ij}$  – тензор скоростей деформации, 1/с;

$t$  – время, с;

$T$  – температура, К;

$U$  – скорость, м/с;

$U_{geo}$  – компонента скорости геострофического ветра, м/с;

$V_{geo}$  – компонента скорости геострофического ветра, м/с;

$w_b$  – скорость «свободного падения», м/с;

$z_r^\theta$  – масштаб шероховатости для температуры, м;

$z_r^u$  – масштаб шероховатости для скорости, м;

Греческие символы:

$\beta$  – коэффициент объемного расширения, К<sup>-1</sup>;

$\delta_{i3}$  – символ Кронекера;

$\varepsilon$  – скорость диссипации энергии, м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup>;

$C_{\varepsilon 1}$  – константа в уравнении для  $\varepsilon$  ( $k - \varepsilon$  модель);

$C_{\varepsilon 2}$  – константа в уравнении для  $\varepsilon$  ( $k - \varepsilon$  модель);

$\lambda$  – теплопроводность, Вт/(м·К);

$\theta$  – температура, К;

$\theta_w$  – температура поверхности, К;

$\theta_0$  – опорная потенциальная температура, К;

$\kappa$  — постоянная Кармана;

$\sigma_\varepsilon$  – константа в уравнении для  $\varepsilon$  ( $k - \varepsilon$  модель);

$\sigma_k$  – константа в уравнении для  $k$  ( $k - \varepsilon$  модель);

$\chi$  – температуропроводность жидкости, м<sup>2</sup>/с;

$\eta$  – колмогоровский микромасштаб, м;

$\mu$  – динамическая вязкость, Па·с;

$\nu$  – кинематическая вязкость, м<sup>2</sup>/с;

$\nu_t$  – турбулентная вязкость,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\nu_{sgs}$  – подсеточная вязкость,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\Delta$  – масштаб фильтра (LES),  $\text{м}$ ;

$\omega$  – завихренность,  $1/\text{с}$ ;

$\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$\rho_0$  – опорная плотность среды,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$\tau_w$  – сдвиговое напряжение на стенке,  $\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)$ ;

$\tau_{ij}$  – тензор подсеточных напряжений, Па;

Индексы:

` - пульсационная компонента;

bottom – нижняя граница расчетной области;

max – максимум;

top – верхняя граница расчетной области;

Безразмерные комплексы

$Pr$  Число Прандтля  $Pr = \frac{\nu}{a}$

$Pr_t$  Турбулентное число Прандтля  $Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t}$

$Ra$  Число Рэлея  $Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu a}$

$Re$  Число Рейнольдса  $Re = \frac{uL}{\nu}$

$Ri$  Число Ричардсона  $Ri = \frac{\beta g \Delta T L}{u^2}$

$Ri_f$  Локальное градиентное число Ричардсона  $Ri_f = \beta g \frac{(\partial T / \partial z)}{(\partial U / \partial z)^2} = \frac{N^2}{(\partial U / \partial z)^2}$

**Публикации по теме диссертации**

1. **Бобров М.С.**, Хребтов М.Ю. Исследование низкочастотных колебаний в условиях неоднородной тепловой конвекции. // Теплофизика и аэромеханика. – 2025. – Т. 32. – №. 4. – С. 617-634.
2. Hrebtov M., **Bobrov M.** Modification of k- $\epsilon$  Model for Sensible Heat and Momentum Flux Reconstruction from Surface Temperature Data // Atmosphere. – 2022. – Т. 13. – №. 7. – С. 1146.
3. **Bobrov M.**, Hrebtov M. Simulation of atmospheric convection over the River Yenisei: Study of large-scale vortices formation // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2021. – Т. 2351. – №. 1.
4. **Bobrov M. S.**, Hrebtov M. Y. Numerical investigation of the effect of river meander on the dynamics of the atmospheric boundary layer // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2020. – Т. 1677. – №. 1. – С. 012005.
5. Hrebtov M. Y., **Bobrov M. S.**, Zhakebaev D. B., Karzhaubaev K. K. Numerical study of the interaction of vortex ring and background turbulence // Thermophysics and Aeromechanics. – 2019. – Т. 26. – №. 6. – С. 821-836.
6. **Bobrov M.**, Hrebtov M., Ivashchenko V., Mullyadzhanov R., Seredkin A., Tokarev M., Markovich D. Pressure evaluation from Lagrangian particle tracking data using a grid-free least-squares method // Measurement Science and Technology. – 2021. – Т. 32. – №. 8. – С. 084014.
7. Hrebtov M. Y., **Bobrov M. S.**, Kozyulin N. N., Bazhenov A. Y. Numerical investigation of the influence of river flow on the atmospheric boundary layer under stably stratified conditions // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2018. – Т. 1105. – №. 1. – С. 012028.
8. Hrebtov M., **Bobrov M.**, Hanjalić K. Numerical investigation of the river flow effect on heat and mass transfer in atmosphere under stably stratified conditions, Proc of 4-th International Conference on Multi-scale Computational Methods for Solids and Fluids ECCOMAS MSF 2019, Sept. 18-20 2019, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina. P. 240-244. ISBN:978-9958-638-57-2.
9. **Бобров М. С.**, Хребтов М. Ю. Исследование совместного влияния локальной температурной неоднородности на подстилающей поверхности и теплового острова на теплоперенос в атмосфере // ВОЕНМЕХ. Вестник Балтийского государственного технического университета. – 2019. – №. 1-2. – С. 74-78.

### Список литературы

1. Abarbanel H. D., Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. Richardson number criterion for the nonlinear stability of three-dimensional stratified flow // *Physical Review Letters*. – 1984. – Т. 52. – №. 26. – С. 2352.
2. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection // *Reviews of modern physics*. – 2009. – Т. 81. – №. 2. – С. 503.
3. Aminossadati S. M., Ghasemi B. Natural convection cooling of a localised heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure // *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. – 2009. – Т. 28. – №. 5. – С. 630-640.
4. André J. C., De Moor G., Lacarrere P., Du Vachat R. Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer // *Journal of Atmospheric Sciences*. – 1978. – Т. 35. – №. 10. – С. 1861-1883.
5. Andren, A., Brown, A. R., Mason, P. J., Graf, J., Schumann, U., Moeng, C. H., Nieuwstadt, F. T. Large-eddy simulation of a neutrally stratified boundary layer: A comparison of four computer codes // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. – 1994. – Т. 120. – №. 520. – С. 1457-1484.
6. Apsley D. D., Castro I. P. A limited-length-scale  $k-\varepsilon$  model for the neutral and stably-stratified atmospheric boundary layer // *Boundary-layer meteorology*. – 1997. – Т. 83. – С. 75-98.
7. Arakawa A., Lamb V. R. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model // *General circulation models of the atmosphere*. – 1977. – Т. 17. – №. Supplement C. – С. 173-265.
8. Arakawa A., Schubert W. H. Interaction of a cumulus cloud ensemble with the large-scale environment, Part I // *Journal of the atmospheric sciences*. – 1974. – Т. 31. – №. 3. – С. 674-701.
9. Avsec D. Tourbillons thermoconvectifs dans l'air: application à la météorologie. – E. Blondel La Rougery, 1939. – Т. 155.
10. Bakhuis D., Ostilla-Mónico R., van der Poel E. P., Verzicco R., Lohse D. Mixed insulating and conducting thermal boundary conditions in Rayleigh-Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2018. – Т. 835. – С. 491-511.
11. Bassani F., Poggi D., Ridolfi L., von Hardenberg J. Rayleigh-Bénard convection with thermal boundary inhomogeneities // *Physical Review E*. – 2022. – Т. 105. – №. 2. – С. 025108.
12. Bazylak A., Djilali N., Sinton D. Natural convection in an enclosure with distributed heat sources

- // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. – 2006. – T. 49. – №. 7. – C. 655-667.
13. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // *Revue Gen. Sci. Pure Appl.* – 1900. – T. 11. – C. 1261-1271, 1309-1328.
  14. Bjerknes J. Saturated-adiabatic ascent of air through dry-adiabatically descending environment // *QJ Roy. Meteor. Soc.* – 1938. – T. 64. – C. 325-330.
  15. Bodenschatz E., Pesch W., Ahlers G. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection // *Annual review of fluid mechanics.* – 2000. – T. 32. – №. 1. – C. 709-778.
  16. Carpenter M. H., Kennedy C. A. Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes. – 1994. – №. NASA-TM-109112.
  17. Chillà F., Schumacher J. New perspectives in turbulent Rayleigh-Bénard convection // *The European Physical Journal E.* – 2012. – T. 35. – C. 1-25.
  18. Couvreur F., Bazile E., Rodier Q., Maronga B., Matheou G., Chinita M. J., Vignon E. Intercomparison of large-eddy simulations of the Antarctic boundary layer for very stable stratification // *Boundary-Layer Meteorology.* – 2020. – T. 176. – C. 369-400.
  19. Crosman E. T., Horel J. D. Sea and lake breezes: A review of numerical studies // *Boundary-layer meteorology.* – 2010. – T. 137. – №. 1. – C. 1-29.
  20. Dey P., Suslov S. A. Nonlinear interaction of thermogravitational waves and thermomagnetic rolls in a vertical layer of ferrofluid placed in a normal magnetic field // *Physics of Fluids.* – 2019. – T. 31. – №. 1.
  21. Elsherbiny S. M., Ragab E. H. Laminar natural convection in inclined rectangular cavities with a localized heat source // *Alexandria Engineering Journal.* – 2013. – T. 52. – №. 3. – C. 249-257.
  22. Estoque M. A., Bhumralkar C. M. Flow over a localized heat source // *Monthly Weather Review.* – 1969. – T. 97. – №. 12. – C. 850-859.
  23. Freedman F. R., Jacobson M. Z. Modification Of The Standard  $\epsilon$ -Equation For The Stable Abl Through Enforced Consistency With Monin–Obukhov Similarity Theory // *Boundary-layer meteorology.* – 2003. – T. 106. – C. 383-410.
  24. Freire L. S., Chamecki M., Bou-Zeid E., Dias N. L. Critical flux Richardson number for Kolmogorov turbulence enabled by TKE transport // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society.* – 2019. – T. 145. – №. 721. – C. 1551-1558.
  25. Getling A. V., Spiegel E. A. Rayleigh-Bénard Convection: Structures and Dynamics. – 1999.
  26. Ghalambaz M., Jamesahar E., Ismael M. A., Chamkha A. J. Fluid-structure interaction study of natural convection heat transfer over a flexible oscillating fin in a square cavity // *International*

- Journal of Thermal Sciences. – 2017. – T. 111. – C. 256-273.
27. Gidel L. T. Cumulus cloud transport of transient tracers // Journal of Geophysical Research: Oceans. – 1983. – T. 88. – №. C11. – C. 6587-6599.
  28. Hadley G. VI. Concerning the cause of the general trade-winds // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1735. – T. 39. – №. 437. – C. 58-62.
  29. Hanjalić K., Hrebtov M. Ground boundary conditions for thermal convection over horizontal surfaces at high rayleigh numbers // Boundary-layer meteorology. – 2016. – T. 160. – C. 41-61.
  30. Hanjalić K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // Journal of fluid Mechanics. – 1972. – T. 52. – №. 4. – C. 609-638.
  31. Hartlep T., Tilgner A., Busse F. H. Large scale structures in Rayleigh-Bénard convection at high Rayleigh numbers // Physical review letters. – 2003. – T. 91. – №. 6. – C. 064501.
  32. Hrebtov M., Hanjalić K. Numerical study of winter diurnal convection over the city of Krasnoyarsk: Effects of non-freezing river, undulating fog and steam devils // Boundary-Layer Meteorology. – 2017. – T. 163. – C. 469-495.
  33. Hrebtov M., Hanjalić K. River-induced anomalies in seasonal variation of traffic-emitted CO distribution over the City of Krasnoyarsk // Atmosphere. – 2019. – T. 10. – №. 7. – C. 407.
  34. Iaccarino G., Mishra A. A., Ghili S. Eigenspace perturbations for uncertainty estimation of single-point turbulence closures // Physical Review Fluids. – 2017. – T. 2. – №. 2. – C. 024605.
  35. Ilyushin B. B. Simulation of the diurnal evolution of the atmospheric boundary layer // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. – 2014. – T. 50. – C. 246-255.
  36. Jaupart C., Mareschal J. C., Schubert G. Heat flow and thermal structure of the lithosphere // Treatise on geophysics. – 2007. – T. 6. – C. 217-252.
  37. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // International journal of heat and mass transfer. – 1972. – T. 15. – №. 2. – C. 301-314.
  38. Kaimal J. C., Finnigan J. J. Atmospheric boundary layer flows: their structure and measurement. – Oxford university press, 1994.
  39. Kenjereš S. Heat transfer enhancement induced by wall inclination in turbulent thermal convection // Physical Review E. – 2015. – T. 92. – №. 5. – C. 053006.
  40. Kenjeres S., Hanjalic K. Combined effects of terrain orography and thermal stratification on pollutant dispersion in a town valley: a T-RANS simulation // Journal of turbulence. – 2002. – T. 3. – №. 1. – C. 026.

41. Kenjereš S., Žilić A., Hanjalić K. Numerical insights into turbulent penetrative convection over localized heat sources // *Journal of Physics: Conference Series*. – IOP Publishing, 2024. – T. 2766. – №. 1. – C. 012055.
42. Khrapunov E., Chumakov Y. Structure of the natural convective flow above to the horizontal surface with localized heating // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2020. – T. 152. – C. 119492.
43. Kirdyashkin A. G. Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient // *International journal of heat and mass transfer*. – 1984. – T. 27. – №. 8. – C. 1205-1218.
44. Kondrashov A., Sboev I., Dunaev P. Evolution of convective plumes adjacent to localized heat sources of various shapes // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2016. – T. 103. – C. 298-304.
45. Kosović B., Curry J. A. A large eddy simulation study of a quasi-steady, stably stratified atmospheric boundary layer // *Journal of the atmospheric sciences*. – 2000. – T. 57. – №. 8. – C. 1052-1068.
46. Krug D., Lohse D., Stevens R. J. A. M. Coherence of temperature and velocity superstructures in turbulent Rayleigh–Bénard flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2020. – T. 887. – C. A2.
47. Kuo H. L. On formation and intensification of tropical cyclones through latent heat release by cumulus convection // *Journal of the atmospheric sciences*. – 1965. – T. 22. – №. 1. – C. 40-63.
48. Kurbatskiy A. F., Kurbatskaya L. I. E- $\varepsilon$ - $\theta$  turbulence closure model for an atmospheric boundary layer including the urban canopy // *Meteorology and atmospheric physics*. – 2009. – T. 104. – №. 1. – C. 63-81.
49. Lappa M. Exact solutions for thermal problems: Buoyancy, marangoni, vibrational and magnetic-field-controlled flows // *Review of Applied Physics*. – 2012.
50. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows // *Numerical prediction of flow, heat transfer, turbulence and combustion*. – Pergamon, 1983. – C. 96-116.
51. Lilly D. K. On the theory of disturbances in a conditionally unstable atmosphere. – The Florida State University, 1959.
52. Madden R. A., Julian P. R. Detection of a 40–50 day oscillation in the zonal wind in the tropical Pacific // *Journal of Atmospheric Sciences*. – 1971. – T. 28. – №. 5. – C. 702-708.
53. Manabe S., Smagorinsky J., Strickler R. F. Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle // *Monthly Weather Review*. – 1965. – T. 93. – №. 12. – C. 769-798.

54. Mansour M. A., Bakeir M. A., Chamkha A. Natural convection inside a C-shaped nanofluid-filled enclosure with localized heat sources // *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. – 2014. – T. 24. – №. 8. – C. 1954-1978.
55. Maykut G. A. Large-scale heat exchange and ice production in the central Arctic // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. – 1982. – T. 87. – №. C10. – C. 7971-7984.
56. Mellor G. L., Yamada T. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers // *Journal of the atmospheric sciences*. – 1974. – T. 31. – №. 7. – C. 1791-1806.
57. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA journal*. – 1994. – T. 32. – №. 8. – C. 1598-1605.
58. Mishra A. A., Duraisamy K., Iaccarino G. Estimating uncertainty in homogeneous turbulence evolution due to coarse-graining // *Physics of Fluids*. – 2019. – T. 31. – №. 2.
59. Moeng C. H. A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 1984. – T. 41. – №. 13. – C. 2052-2062.
60. Monin A. S. The atmospheric boundary layer // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1970. – T. 2. – №. 1. – C. 225-250.
61. Monin A. S., Obukhov A. M. Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere // *Contrib. Geophys. Inst. Acad. Sci. USSR*. – 1954. – T. 151. – №. 163. – C. e187
62. Morinishi Y., Lund, T. S., Vasilyev O. V., Moin P. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow // *Journal of computational physics*. – 1998. – T. 143. – №. 1. – C. 90-124.
63. Nieuwstadt F. T., Mason P. J., Moeng C. H., Schumann U. Large-eddy simulation of the convective boundary layer: A comparison of four computer codes // *Turbulent Shear Flows 8: Selected Papers from the Eighth International Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, September 9–11, 1991*. – Springer Berlin Heidelberg, 1993. – C. 343-367.
64. Ostilla-Mónico R., Amritkar A. Regime crossover in Rayleigh–Bénard convection with mixed boundary conditions // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2020. – T. 903. – C. A39.
65. Pandey A., Scheel J. D., Schumacher J. Turbulent superstructures in Rayleigh–Bénard convection // *Nature communications*. – 2018. – T. 9. – №. 1. – C. 2118.
66. Parodi A., von Hardenberg J., Passoni G., Provenzale A., Spiegel E. A. Clustering of plumes in turbulent convection // *Physical review letters*. – 2004. – T. 92. – №. 19. – C. 194503.
67. Piller M. Direct numerical simulation of turbulent forced convection in a pipe // *International journal for numerical methods in fluids*. – 2005. – T. 49. – №. 6. – C. 583-602.

68. Poulos G. S., Blumen W., Fritts D. C., Lundquist J. K., Sun J., Burns S. P., Jensen M. CASES-99: A comprehensive investigation of the stable nocturnal boundary layer // *Bulletin of the American Meteorological Society*. – 2002. – T. 83. – №. 4. – C. 555-582.
69. Pyanova E. A., Penenko V. V., Faleychik L. M. Numerical study of pollutants dispersion in urban atmosphere in warm and cold seasons (Krasnoyarsk city as an example) // *25th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics*. – International Society for Optics and Photonics, 2019. – T. 11208. – C. 112088C.
70. Rayleigh L. LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1916. – T. 32. – №. 192. – C. 529-546.
71. Riehl H. A model of hurricane formation // *Journal of Applied Physics*. – 1950. – T. 21. – №. 9. – C. 917-925.
72. Ripesi P., Biferale L., Sbragaglia M., Wirth A. Natural convection with mixed insulating and conducting boundary conditions: low- and high-Rayleigh-number regimes // *Journal of fluid mechanics*. – 2014. – T. 742. – C. 636-663.
73. Schmidt H., Schumann U. Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1989. – T. 200. – C. 511-562.
74. Sieber M., Paschereit C. O., Oberleithner K. Spectral proper orthogonal decomposition // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2016. – T. 792. – C. 798-828.
75. Siggia E. D. High Rayleigh number convection // *Annual review of fluid mechanics*. – 1994. – T. 26. – №. 1. – C. 137-168.
76. Steeneveld G. J., Mauritsen T., De Bruijn E. I. F., Vilà-Guerau de Arellano J., Svensson G., Holtslag A. A. M. Evaluation of limited-area models for the representation of the diurnal cycle and contrasting nights in CASES-99 // *Journal of Applied Meteorology and Climatology*. – 2008. – T. 47. – №. 3. – C. 869-887.
77. Stevens R. J., Blass A., Zhu X., Verzicco R., Lohse D. Turbulent thermal superstructures in Rayleigh-Bénard convection // *Physical review fluids*. – 2018. – T. 3. – №. 4. – C. 041501.
78. Stoll R. et al. Large-eddy simulation of the atmospheric boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*. – 2020. – T. 177. – C. 541-581.
79. Sukhanovskii A., Evgrafova A., Popova E. Horizontal rolls over localized heat source in a cylindrical layer // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2016. – T. 316. – C. 23-33.

80. Sumner J., Masson C. The Apsley and Castro Limited-Length-Scale Model Revisited for Improved Performance in the Atmospheric Surface Layer // *Boundary-layer meteorology*. – 2012. – T. 144. – №. 2. – С. 199-215.
81. Svensson G. A. A. M. H., Holtslag A. A. M., Kumar V., Mauritsen T., Steeneveld G. J., Angevine W. M., Zampieri M. Evaluation of the diurnal cycle in the atmospheric boundary layer over land as represented by a variety of single-column models: The second GABLS experiment // *Boundary-Layer Meteorology*. – 2011. – T. 140. – С. 177-206.
82. Teimurazov A., Reiter P., Shishkina O., Frick P. Heat transport in a cell heated at the bottom and the side (a) // *Europhysics Letters*. – 2021. – T. 134. – №. 3. – С. 34001.
83. Thomson J. On a changing tessellated structure in certain liquids // *Proc. Phil. Soc. Glasgow*. – 1882. – T. 13. – С. 464-468.
84. Van Heerwaarden C. C., Mellado J. P., De Lozar A. Scaling laws for the heterogeneously heated free convective boundary layer // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 2014. – T. 71. – №. 11. – С. 3975-4000.
85. Van Heerwaarden C. C., Van Stratum B. J., Heus T., Gibbs J. A., Fedorovich E., Mellado J. P. MicroHH 1.0: a computational fluid dynamics code for direct numerical simulation and large-eddy simulation of atmospheric boundary layer flows // *Geoscientific Model Development*. – 2017. – T. 10. – С. 3145-3165.
86. van Stratum B. J. H. The influence of misrepresenting the nocturnal boundary layer on daytime convection in large-eddy simulation : дис. – Universität Hamburg Hamburg, 2017.
87. Vasiliev A., Sukhanovskii A. Turbulent convection in a cube with mixed thermal boundary conditions: low Rayleigh number regime // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2021. – T. 174. – С. 121290.
88. Verdoold J., Tummers M. J., Hanjalić K. Oscillating large-scale circulation in turbulent Rayleigh-Bénard convection // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. – 2006. – T. 73. – №. 5. – С. 056304.
89. Von Hardenberg J., Parodi A., Passoni G., Provenzale A., Spiegel E. A. Large-scale patterns in Rayleigh-Bénard convection // *Physics Letters A*. – 2008. – T. 372. – №. 13. – С. 2223-2229.
90. Waggy S. B., Biringen S., Sullivan P. P. Direct numerical simulation of top-down and bottom-up diffusion in the convective boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2013. – T. 724. – С. 581-606.

91. Walker G. T. Correlations in seasonal variations of weather. VIII, A further study of world weather // *Mon. Indian Meteor. Dept.* – 1923. – Т. 24. – С. 75-131.
92. Wang Z., Calzavarini E., Sun C., Toschi F. How the growth of ice depends on the fluid dynamics underneath // *Proceedings of the National Academy of Sciences.* – 2021. – Т. 118. – №. 10. – С. e2012870118.
93. Wang Q., Liu H. R., Verzicco R., Shishkina O., Lohse D. Regime transitions in thermally driven high-Rayleigh number vertical convection // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2021. – Т. 917. – С. A6.
94. Wilcox D. C. Multiscale model for turbulent flows // *AIAA journal.* – 1988. – Т. 26. – №. 11. – С. 1311-1320.
95. Williamson J. H. Low-storage runge-kutta schemes // *Journal of computational physics.* – 1980. – Т. 35. – №. 1. – С. 48-56.
96. Xin Y. B., Xia K. Q. Boundary layer length scales in convective turbulence // *Physical Review E.* – 1997. – Т. 56. – №. 3. – С. 3010.
97. Xi H. D., Zhou S. Q., Zhou Q., Chan T. S., Xia K. Q. Origin of the temperature oscillation in turbulent thermal convection // *Physical review letters.* – 2009. – Т. 102. – №. 4. – С. 044503.
98. Yamada T. The critical Richardson number and the ratio of the eddy transport coefficients obtained from a turbulence closure model // *Journal of Atmospheric Sciences.* – 1975. – Т. 32. – №. 5. – С. 926-933.
99. Yoo J. S., Kim M. U. Two-dimensional convection in a horizontal fluid layer with spatially periodic boundary temperatures // *Fluid dynamics research.* – 1991. – Т. 7. – №. 3-4. – С. 181.
100. Zhao L. et al. Strong contributions of local background climate to urban heat islands // *Nature.* – 2014. – Т. 511. – №. 7508. – С. 216-219.
101. Zhang L., Ding G. Y., Xia K. Q. On the effective horizontal buoyancy in turbulent thermal convection generated by cell tilting // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2021. – Т. 914. – С. A15.
102. Zheng X., Xin S., Wang C., Siginer D. A., Cai W. H. Oscillating onset of the Rayleigh–Bénard convection with viscoelastic fluids in a slightly tilted cavity // *Physics of Fluids.* – 2023. – Т. 35. – №. 2.
103. Абрамов А. Г., Горячев В. Д., Смирнов Е. М. Прямое численное моделирование турбулентной свободной конвекции, развивающейся во времени у нагретой вертикальной стенки // *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ2011).* – 2011. – С. 374-380.

104. Бодойя Д. К., Остерл Д. Ф. Развитие естественной конвекции между нагретыми вертикальными пластинами // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер.: Теплопередача. – 1962. – №. 1. – С. 52-56.
105. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. – Федеральное государственное унитарное предприятие Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр Наука, 1989.
106. Курбацкая Л. И., Курбацкий А. Ф. О вычислении турбулентной скорости трения в численной модели городского острова тепла в устойчиво стратифицированной атмосфере // Оптика атмосферы и океана. – 2016. – Т. 29. – №. 6. – С. 512-515.
107. Мебарек-Удина Ф., Бессаи Р. Численное моделирование естественного конвективного теплообмена в вертикально ориентированном цилиндрическом кольцевом канале с источниками тепла для наножидкости на основе воды с наночастицами меди // Теплофизика и аэромеханика. – 2019. – Т. 26. – №. 3. – С. 351-361.
108. Носов В. В., Лукин В. П., Носов Е. В., Торгаев А. В. Структура турбулентности над нагретыми поверхностями. Численные решения // Оптика атмосферы и океана. – 2016. – Т. 29. – №. 1. – С. 23-30.
109. Сафрай А. С., Ткаченко И. В. Численное моделирование гравитационных течений жидкости в наклонных каналах // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2009. – №. 1. – С. 27-38.
110. Терехов В. И., Экаид А. Л. Трехмерная ламинарная конвекция внутри параллелепипеда с нагревом боковых стенок // Теплофизика высоких температур. – 2011. – Т. 49. – №. 6. – С. 905-911.
111. Терехов В. И., Экаид А. Л. Ламинарная свободная конвекция между вертикальными параллельными пластинами с различными температурами // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19. – №. 4. – С. 415-429.
112. Чуруксаева В. В., Старченко А. В. Математическая модель и численный метод для расчета турбулентного течения в русле реки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – №. 6 (38).
113. Шатров А. В., Шварц К. Г. Численное моделирование атмосферных мезомасштабных процессов переноса примесей в окрестности города Кирова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3. – №. 3. – С. 117-125.